Zasady oceniania

Zadanie 1. (0-2)

Przykładowe rozwiązanie:

$$\lim_{x\to 5^-}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{2(x+1)}{x^2-25}\right)=\lim_{x\to 5^-}\left(\frac{x+5}{(x-5)(x+5)}-\frac{2x+2}{(x-5)(x+5)}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 5^-}\frac{-x+3}{(x-5)(x+5)}=\left[\frac{-2}{0^-}\right]=\infty$$

Zasady oceniania.

1p. Zapisanie $\lim_{x\to 5^-}\frac{-x+3}{(x-5)(x+5)}$.

2p. Obliczenie granicy funkcji w punkcie $\lim_{x\to 5^-} f(x)=\infty$.

Zadanie 2. (0-3)

Przykładowe rozwiązanie.

Funkcja liniowa $f(x)=ax+b$ jest rosnąca i miejsce zerowe jest ujemne wtedy, gdy $a>0\ \wedge\ b>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(m^2+2m-8>0\ \wedge\ m^2+5m>0)$$
$$[(m+4)(m-2)>0\ \wedge\ m(m+5)>0]$$
$$[m\in(-\infty;-4)\cup(2;\infty)\ \wedge\ m\in(-\infty;-5)\cup(0;\infty)]$$

$m\in(-\infty;-5)\cup(2;\infty)$.

Zasady oceniania.

1p. Zapisanie warunków $a>0\ \wedge\ b>0$ tzn. $m^2+2m-8>0\ \wedge\ m^2+5m>0$.

2p. Rozwiązanie każdej z nierówności.

3p. Podanie poprawnej odpowiedzi $m\in(-\infty;-5)\cup(2;\infty)$.

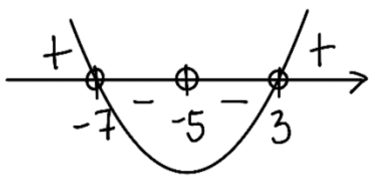
Zadanie 3.1. (0-3)

Przykładowe rozwiązanie.

$f(x)=x+\frac{4}{x+5}$, $x\in R-\{-5\}$.

Przekształćmy wzór funkcji f . $f(x)=\frac{x^2+5x+4}{x+5}$, $x\in R-\{-5\}$.

Wyznaczmy pochodną funkcji f . $f'(x)=\frac{x^2+10x+21}{(x+5)^2}\ \wedge\ x\neq -5$.



Wyznaczamy miejsce zerowe pochodnej funkcji f . $f'(x)=0$ <=> $(x+7)(x+3)=0$ <=> $(x=-7\ lub\ x=-3)$.

Ponieważ w zbiorze liczb rzeczywistych $R-\{-5\}$ $f'(x)>0$ dla $x\in(-\infty;-7)\cup(-3;\infty)$ oraz $f'(x)<0$ dla

$x \in (-7; -5) \cup (-5; -3)$, zatem funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -7], [-3; \infty)$ i malejąca w każdym z przedziałów: $[-7; -5), (-5; -3]$.

Zasady oceniania.

1p. Przekształcenie wzoru funkcji f i obliczenie pochodnej funkcji
$f'(x) = \frac{x^2+10x+21}{(x+5)^2} \ \wedge \ x \in R - \{-5\}$.

2p. Wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji $f'(x) = 0 <=> x \in \{-7; -3\}$.

3p. Zbadanie znaku pochodnej funkcji f i określenie przedziałów w których funkcja jest rosnąca, malejąca.

Funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -7], [-3; \infty)$, malejąca w przedziałach $[-7; -5), (-5; -3]$.

Zadanie 3.2. (0-2)

Przykładowe rozwiązanie.

Zapiszmy równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $x = 0$ $y = ax + b$, gdzie $a = f'(x_0)$ i $f'(x) = \frac{x^2+10x+21}{(x+5)^2}$, zatem $a = f'(0) = \frac{21}{25}$, oraz $y = f(0) = \frac{4}{5}$.

Wówczas styczna do wykresu funkcji f w punkcie $\left(0, \frac{4}{5}\right)$ określa się równaniem $y = \frac{21}{25}x + \frac{4}{5}$.

Zasady oceniania.

1p. Zapisanie równania stycznej $y = ax + b$ i obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej $a = f'(x),\ a' = \frac{21}{25}$.

2p. Wyznaczenie $y_0 = \frac{4}{5}$ i zapisanie równania stycznej $y = \frac{21}{25}x + \frac{4}{5}$.

Zadanie 4. (0-3)

Przykładowe rozwiązanie.

I sposób.

T: $(x^3 - 3x^2 + 3x)(x - 1) \geq x$,

D: $(x^3 - 3x^2 + 3x)(x - 1) - (x - 1) \geq 0 <=> [(x^3 - 3x^2 + 3x) - 1] \geq 0 <=>$
$(x - 1)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \geq 0 <=> (x - 1)(x - 1)^3 \geq 0 <=> (x - 1)^4 \geq 0$

Nierówność tożsamościowa dla każdej liczby rzeczywistej x .

II sposób

T: $(x^3 - 3x^2 + 3x)(x - 1) + 1 \geq x$

D: Po przekształceniu wyrażenia otrzymamy:

$x^4 - x^3 - 3x^3 + 3x^2 + 3x^2 - 3x - x + 1 \geq 0 <=> x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \geq 0.$

Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona $(a-b)^4$ otrzymamy $(x-1)^4 \geq 0$. Nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x \in R$.

Zasady oceniania.

I sposób

1p. Przekształcenie wyrażenia do postaci $(x^3-3x^2+3x)(x-1)-(x-1) \geq 0$ i wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias, $(x-1)[(x^3-3x^2+3x)-1] \geq 0$.

2p. Przekształcenie wyrażenia do postaci $(x-1)(x^3-3x^2+3x-1) \geq 0$ i zauważenie wzoru skróconego mnożenia.

3p. Doprowadzenie wyrażenia do postaci $(x-1)^4 \geq 0$ i zapisanie, że nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x \in R$.

II sposób

1p. Przekształcenie wyrażenia do postaci $x^4-x^3-3x^3+3x^2+3x^2-3x-x+1 \geq 0$.

2p. Pogrupowanie wyrazów podobnych i doprowadzenie wyrażenia do postaci
$x^4-4x^3+6x^2-4x+1 \geq 0$.

3p. Zauważenie wzoru dwumianowego Newtona i zapisanie wyrażenia w postaci $(x-1)^4 \geq 0$ i stwierdzenie, że nierówność jest prawdziwa dla $x \in R$.

Zadanie 5. (0-4)

Przykładowe rozwiązanie.

$$4\cos^2 x = \frac{4\cos x - \sin 2x}{\cos x};\ x \in [0; 2\pi]$$

Przekształćmy wyrażenie do postaci $4\cos^2 x = \frac{4\cos x}{\cos x} - \frac{\sin 2x}{\cos x}$, otrzymując $4\cos^2 x = 4 - \frac{\sin 2x}{\cos x}$.
Korzystając ze wzoru na sinus podwojonego kąta, równanie można zapisać w postaci
$4\cos^2 x = 4 - 2\sin x_2$ uwzględniając dziedzinę $\cos x \neq 0$ <=> $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$,
$4\cos^2 x + 2\sin x - 4 = 0\ /:2$,
$2\cos^2 x + \sin x - 2 = 0$.

Korzystając ze wzoru $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, stąd $2(1-\sin^2 x) + \sin x - 2 = 0$.
Po przekształceniu $-\sin x\,(2\sin x - 1) = 0$ <=> $(\sin x = 0,\ 2\sin x = 1)$ <=>
$x = k\pi \ \wedge\ k \in Z\ \vee\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ \vee\ x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in Z$.
Uwzględniając dziedzinę i $x \in [0; 2\pi]$, to rozwiązaniem równania są $x \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi, 2\pi\right\}$.

Zasady oceniania.

1p. Przekształcenie równania do postaci $4\cos^2 x + 2\sin x - 4 = 0$.

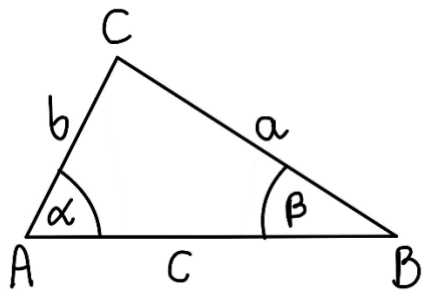
2p. Zapisanie równania w postaci $-\sin x\,(2\sin x - 1) = 0$.

3p. Rozwiązanie jednego z równań $\sin x = 0\ \vee\ \sin x = \frac{1}{2};\ x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub
$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi;\ k \in Z$.

4p. Rozwiązanie obu równań i podanie rozwiązania danego równania w przedziale $[0;\ 2\pi]$, $x \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi, 2\pi\right\}$.

Zadanie 6. (0-3)

Przykładowe rozwiązanie.



Z: $\frac{a}{cos\alpha} = \frac{b}{cos\beta}$, $\alpha,\ \beta$ - kąty w $\triangle\ ABC$, $a,\ b$ - długości boków na przeciw kąta α i β .

T: $\triangle\ ABC$ jest równoramienny

D: Aby wykazać, że $\triangle\ ABC$ jest równoramienny należy wykazać, że kąty przy podstawie w trójkącie są równe albo, że dwa boki trójkąta mają jednakowe długości.

I sposób

Z założenia $\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta}$ => $\frac{a}{b} = \frac{cos\alpha}{cos\beta}$ ***(1)***

Korzystając z twierdzenia sinusów $\triangle\ ABC$ otrzymamy $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ => $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ ***(2).***

Z zależności ***(1)*** i ***(2)*** => $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{cos\alpha}{cos\beta}$ => $\frac{\sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{sin\beta}{cos\beta}$ => $tan\alpha = \ tan\beta$, $\alpha,\ \beta$ - są kątami w $\triangle$, to $\alpha = \beta$, zatem $\triangle\ ABC$ jest $\triangle$ równoramiennym.

II sposób

Korzystając z twierdzenia cosinusów w $\triangle\ ABC$ otrzymamy

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\beta \end{cases}$$ odejmując równanie stronami

Otrzymamy $a^2 - b^2 = b^2 - a^2 - 2bccos\alpha + 2accos\beta$, po przekształceniu mamy $2a^2 - 2b^2 = 2c(acos\beta - bcos\alpha)$ ***(1)***

Korzystając z założenia $\frac{a}{cos\alpha} = \frac{b}{cos\beta}$ => $\cos\beta = \frac{b\cos\alpha}{a}$ ***(2)***

Uwzględniając warunki **(1)** i ***(2)*** mamy $a^2 - b^2 = c\left(\frac{acos\alpha}{a} - cos\alpha\right)$, zatem $a^2 - b^2 = 0$ => $(a-b)(a+b) = 0$ <=> $(a = b\ \vee\ a = -b)$, $a,\ b$ długości boków trójkąta, to $a = b$, zatem $\triangle\ ABC$ jest równoramienny.

Zasady oceniania.

I sposób

1p. Korzystając z założenia $\frac{a}{cos\alpha} = \frac{b}{cos\beta}$ i przekształcenia wyrażenia do postaci $\frac{a}{b} = \frac{cos\alpha}{cos\beta}$.

2p. Skorzystanie z twierdzenia sinusów i zapisanie zależności $\frac{a}{b} = \frac{sin\alpha}{sin\beta}$.

3p. Porównanie zależności $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$, to $tan\alpha = \ tan\beta$ i zapisanie wniosku, że $\triangle\, ABC$ jest równoramienny.

II sposób

1p. Skorzystanie z twierdzenia cosinusów w $\triangle\, ABC$ i zapisanie warunków

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \end{cases}$$ i odjęcie równań stronami

2p. Zapisanie wyrażenia w postaci $a^2 - b^2 = c(acos\beta - bcos\alpha)$ i skorzystanie z założenia $\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta}$ => $\cos\beta = \frac{b\cos\alpha}{a}$.

3p. Doprowadzenie wyrażenia do postaci $a^2 - b^2 = 0$, $(a-b)(a+b) = 0$ => $a = b$ lub $a = -b$ - nie spełnia warunków zadania, zatem $a = b$, to $\triangle\, ABC$ jest równoramienny.

Zadanie 7.1 (0-2)

Przykładowe rozwiązanie.

Zastosujemy schemat Bernoulliego.

$$n = 5,\ k \geq 2,\ p = 0{,}2;\ q = 0{,}8$$

$$P_5(k \geq 2) = 1 - P_5(k \leq 1) = 1 - [P_5(k=0) + P_5(k=1)]$$
$$= 1 - \left[\binom{5}{0} \cdot (0{,}2)^0 \cdot (0{,}8)^5 + \binom{5}{1} \cdot (0{,}2) \cdot (0{,}8)^4\right. = \frac{821}{3125} \approx 0{,}2627$$

Zasady oceniania.

1p. Zauważenie, że można skorzystać ze schematu Bermoulliego oraz podanie $n = 5,\ k \geq 2,\ p = 0{,}2,\ q = 0{,}8$.

2p. Zapisanie i obliczenie prawdopodobieństwa $P_5(k \geq 2) = \frac{821}{3125}$.

Zadanie 7.2 (0-2)

Przykładowe rozwiązanie.

Zdarzenie A - w Bazie nie będzie samochodów,

B - w Bazie będzie co najmniej jeden samochód,

n - liczba samochodów $(n \in N_+)$

$P(A) = (0{,}8)^n$, $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n$, zatem $1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \geq 0{,}91$ <=> $\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq \frac{9}{100}$, $n \in N$, $n \geq 11$.

Odpowiedź: Co najmniej 11 samochodów.

Zasady oceniania.

1p. Zapisanie nierówności $1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \geq 0{,}91$.

2p. Rozwiązanie tej nierówności i podanie odpowiedzi “co najmniej 11 samochodów”.

Zadanie 8. (0-5)

Przykładowe rozwiązanie.

Równanie $(x-4)[x^2+(m-3)x+m^2-m-6]=0$ ma 3 różne rozwiązania <=> spełniane są warunki

$$\begin{cases} 1.\ \Delta > 0\,, \quad \text{równania } x^2+(m-3)x+m^2-m-6=0 \\ 2.\ x_1 \neq 4 \text{ i } x_2 \neq 4 \\ 3.\ 4x_1x_2 > x_1^2+x_2^2+16-5m-51. \end{cases}$$

1. $\Delta > 0$ <=> $(m-3)^2-4(m^2-m-6)>0$ <=> $3m^2-2m+33>0$ <=> $3m^2+2m-33<0$ <=> $3\left(m+\frac{11}{3}\right)(m-3)<0$ <=> $m \in \left(-\frac{11}{3};\ 3\right)$.
2. Wyznaczamy wartości parametru m , dla których rozwiązaniem równania kwadratowego $x^2+(m-3)x+m^2-m-6=0$ jest liczba 4 .
   $16+4(m-3)+m^2-m-6=0$ <=> $m^2+3m-2=0$ <=> $\left(m=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\ lub\ m=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)$ tzn. $m \neq \frac{-3+\sqrt{12}}{2}\ \wedge\ m \neq \frac{-3-\sqrt{12}}{2}$.
3. Nierówności $4x_1x_2 > x_1^2+x_2^2-5m-35$ można przedstawić w postaci
   $4x_1x_2 > (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-5m-35$ <=> $(x_1+x_2)^2-6x_1x_2-5m-35<0$.

Korzystając z wzorów Viete’a otrzymamy:

$5m^2+5m-10>0$ <=> $m^2+m-2>0$ <=> $(m+2)(m-1)>0$ <=> $m \in (-\infty;-2) \cup (1;\infty)$.

Uwzględniając wszystkie trzy warunki

$$\begin{cases} m \in \left(-\frac{11}{3};3\right) \\ m \neq \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\ \wedge\ m \neq \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \\ m \in (-\infty;-2) \cup (1;\infty) \end{cases}$$

Otrzymamy $m \in \left(-\frac{11}{3};\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2};-2\right) \cup (1;3)$.

Zasady oceniania.

1p. Ustalenie warunków rozwiązania zadania

$$\begin{cases} 1.\ \ \Delta > 0 \quad \text{równania } x^2+(m-3)x+m^2-m-6=0 \\ 2.\ \ x_1 \neq 4,\ x_2 \neq 4 \text{ lub } f(4) \neq 0 \\ 3.\ \ 4x_1x_2 > x_1^2+x_2^2+16-5m-51. \end{cases}$$

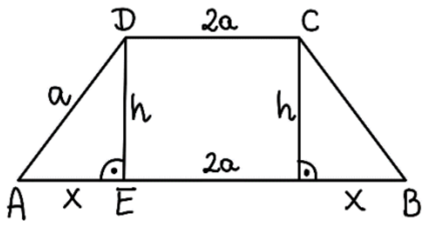
2p. obliczenie wszystkich wartości parametru m , dla których równanie ma dwa różne rozwiązania tzn. $\Delta > 0$ <=> $m \in \left(-\frac{11}{3};3\right)$.

3p. Wyznaczenie wartości parametru m , dla których rozwiązania równania kwadratowego jest liczba 4 i zapisanie $x \neq 4$ <=> $m \neq \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ i $m \neq \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

4p. Rozwiązanie nierówności $4x_1x_2 > x_1^2 + x_2^2 - 5m - 35$ <=> $m \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$.

5p. Uwzględniając właściwych przedziałów i podanie prawidłowej odpowiedzi
$m \in \left(-\frac{11}{3}; \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}; -2\right) \cup (1; 3)$.

Zadanie 9.1 (0-3)



Przykładowe rozwiązanie.

Wprowadzimy oznaczenia jak na rysunku obok.

Pole trapezu $ABCD$ jest równe: $P = \frac{2a+2a+2x}{2} \cdot h = (2a + x) \cdot h$.

$\triangle AED$ jest prostokątny, zatem $h^2 = a^2 - x^2$ => $h = \sqrt{a^2 - x^2} \;\wedge\; x \in (0; a)$, wobec tego pole trapezu $P(x) = (2a + x)\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{(2a + x)^2 \cdot (a^2 - x^2)}$.

Zasady oceniania.

1p. Zapisanie pola trapezu: $P = (2a + x)h$

2p. Wyznaczenie wysokości h od a i x oraz $x \in (0; a)$

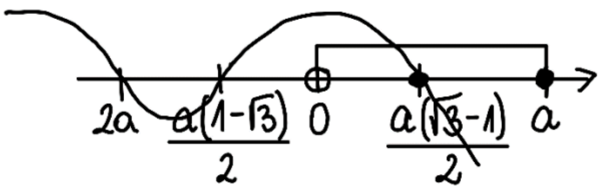
3p. Zapisanie pola trapezu $P(x) = \sqrt{(2a + x)^2 \cdot (a^2 - x^2)}$.

Zadanie 9.2 (0-4)

Przykładowe rozwiązanie.

1. Utwórzmy funkcję pomocniczą $f(x) = (2a + x)^2(a^2 - x^2)$, po przekształceniu otrzymamy $f(x) = -x^4 - 4ax^3 - 3a^2x^2 + 4a^3x + 4a^2 \;\wedge\; x \in (0; a)$.
2. Wyznaczamy pochodną funkcji f , $f'(x) = -4x^3 - 12a^2x - 6a^2x + 4a^3$, $D_{f'} = (0; a)$.
3. Wyznaczamy miejsce zerowe pochodnej funkcji f .
   $f'(x) = 0$ <=> $-(x + 2a)(2x^2 + 2ax - a^2) = 0$ <=>
   $x = -2a \notin D$ lub $2x^2 + 2ax - a^2 = 0$, stąd $x = \frac{-a(1+\sqrt{3})}{2}$ lub $x = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$.
4. Analiza znaku pochodnej.

x	$\left(0; \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}\right)$	$\frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$	$\left(\frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}; a\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$



Pole trapezu będzie największe dla $x = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$, czyli długości dłuższej podstawy $|AB| = 2a + \frac{2a(\sqrt{3}-1)}{2} = a(\sqrt{3}+1)$.

Zasady oceniania.

1p. Utworzenie funkcji pomocniczej $f(x) = (2a + x)^2(a^2 - x^2)$ i doprowadzenie funkcji do postaci $f(x) = -x^4 - 4ax^3 - 3a^2x^2 + 4a^3x + 4a^2 \;\wedge\; x \in (0; a)$.

2p. Wyznaczenie pochodnej funkcji f , $f'(x) = -4x^3 - 12a^2x - 6a^2x + 4a^3$, $D_{f'} = (0; a)$.

3p. Wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji f i podanie miejsce zerowych, $x = \frac{-a(1+\sqrt{3})}{2}$, $x = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$, $x = -2a$.

4p. Analiza znaku pochodnej funkcji i podanie poprawnej odpowiedzi $|AB| = a(\sqrt{3}+1)$.

Zadanie 10.1 (0-2)

Przykładowe rozwiązanie

Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa $S = \frac{a_1}{1-q}$, jeżeli $|q| < 1$.

$a_1 = \frac{1}{x+2}$, $q = \frac{2x+1}{x+2}$, $|q| < 1$ <=> $\left|\frac{2x+1}{x+2}\right| < 1 \;\wedge\; x \neq -2$.

Nierówność $\left|\frac{2x+1}{x+2}\right| < 1$ można przekształcić do postaci $|2x + 1| < |x + 2| \;\wedge\; x \neq -2$,

$(2x + 1)^2 - (x + 2)^2 < 0$ <=> $(2x + 1 - x - 2)(2x + 1 + x + 2) < 0$ <=>
$(x - 1)(3x + 3) < 0$ <=> $x \in (-1; 1)$.

Zasady oceniania.

1p. Zapisanie warunku $|q| < 1$ <=> $\left|\frac{2x+1}{x+2}\right| < 1 \;\wedge\; x \neq -2$.

2p. Rozwiązanie nierówności i podanie poprawnej odpowiedzi $x \in (-1; 1)$.

Zadanie 10.2 (0-2)

Przykładowe rozwiązanie.

Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego

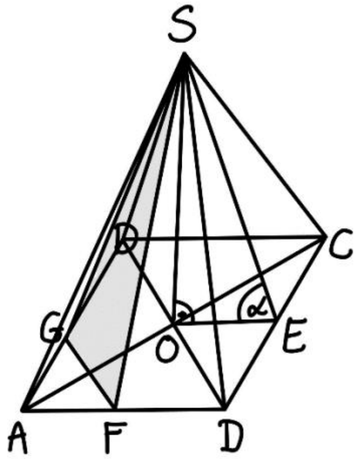
$S = \frac{a_1}{1-q}$ <=> $S = \frac{\frac{1}{x+2}}{1-\frac{2x+1}{x+2}} = \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{-x+1} = \frac{1}{1-x}$.

Zasady oceniania.

1p. Zapisanie warunku $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{x+2}}{1-\frac{2x+1}{x+2}}$

2p. Przekształcenie wyrażenia i zapisanie odpowiedzi $S = \frac{1}{1-x}$.

Zadanie 11. (0-4)



Przykładowe rozwiązanie.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.

1. Przekrój płaszczyzny przechodzącej przez wierzchołek ostrosłupa i środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy jest trójkątem równoramiennym, w którym $|FG| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
2. $\triangle\, EOS$ Jest trójkątem prostokątnym, w którym $|OE| = \frac{1}{2}a$, $|\sphericalangle OES| = \alpha = 60°$, stąd $|SE| = a$ i $|SO| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $a > 0$.
3. Wysokości przekroju obierzmy z $\triangle\, OPS$, $|OP| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $|OS| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy: $|SP|^2 = |OP|^2 + |OS|^2$, zatem $h_p^2 = \frac{2a^2}{16} + \frac{3a^2}{4}$ => $h_p^2 = \frac{14a^2}{16}$ => $h_p = \frac{a\sqrt{14}}{4}$.

4. Pole przekroju jest równe $P = \frac{1}{2}|FG| \cdot h_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{4} = \frac{a^2\sqrt{7}}{8}$.

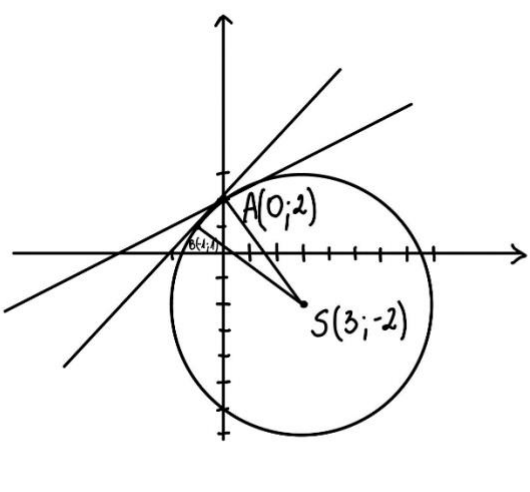
Zasady oceniania.

1p. Zaznaczenie na rysunku poprawnie szukanego przekroju i zauważenie, że $|GF| = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

2p. Zaznaczenie kąta nachylenia ściany bocznej α do płaszczyzny podstawy i wyznaczenie wysokości SO ostrosłupa.

3p. Wyznaczenie wysokości $\triangle\, FGS$, $h_p = \frac{a\sqrt{14}}{4}$.

4p. Obliczenie pola przekroju $P = \frac{a^2\sqrt{7}}{8}$.



Zadanie 12. (0-6)

Przykładowe rozwiązanie.

1. Wyznaczamy współrzędne punktów przecięcia się okręgu z prostą.

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 + (x+2)^2 - 6x + 4(x+2) - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ 2x(x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ x = 0 \lor x = -1 \end{cases}$$

A: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ B: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

$A = (0; 2)$ $B = (-1; 1)$.

2. Zapiszmy równanie okręgu w postaci kanonicznej

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$, czyli $S = (3; -2)$, $r = 5$

3. Wyznaczamy styczne do okręgu w punktach A i B , zatem wektor $\overrightarrow{AS} = [3; -4]$ => równanie prostej prostopadłej do wektora $\overrightarrow{AS}$ określa się wzorem l: $3x - 4y + C = 0$, $A(0; 2) \in l$ => $-8 + C = 0$ => $C = 8$.

Analogicznie wyznaczamy prostą styczną do okręgu w punkcie B .

Wektor $\overrightarrow{BS} = [3+1,\ 2-1] = [4;\ -3]$ =>

k: $4x - 3y + C = 0$, $B = (-1; 1) \in k$ => $-4 - 3 + C = 0$ => $C = 7$

$4x - 3y + 7 = 0$ - równanie prostej stycznej do okręgu w punkcie B .

4. Aby wyznaczyć punkt przecięcia się stycznej do okręgu należy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0 \quad |\cdot(-4) \\ 4x - 3y + 7 = 0 \quad |\cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12x + 16y - 32 = 0 \\ 12x - 9y + 21 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7y = 11 \\ y = \frac{11}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{7} \\ y = \frac{11}{7} \end{cases}$$

Styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie $E = \left(-\frac{4}{7}; \frac{11}{7}\right)$.

5. Pole czworokąta $ASBE$ jest sumą pól trójkątów ABS i ABE .

Korzystając z wzoru na pole trójkąta o wierzchołkach $A = (0; 2)$, $B = (-1; 1)$ i $S = (3; -2)$ otrzymamy $P = \frac{1}{2}|(-1-0)(-2-2) - (1-2)(3-0)| = \frac{7}{2}$.

6. Obliczenie pola $\triangle\, ABE$; $P_{\triangle} = \frac{1}{2}\left|(-1-0)\left(\frac{11}{7}-2\right)-(1-2)\left(-\frac{4}{7}-0\right)\right| = \frac{1}{14}$.

Pole czworokąta $ASBE$ jest równe $P = \frac{7}{2}+\frac{1}{14}=\frac{50}{14}=\frac{25}{7}$.

Zasady oceniania.

1p. Wyznaczenie współrzędnych punktów przecięcia się współrzędnych prostej i okręgu:
$A=(0;2)$, $B=(-1;1)$.

2p. Zapisanie równania okręgu w postaci kanonicznej i wyznaczenie współrzędnych środka okręgu
$S=(3;-2)$ i $r=5$.

3p. Wyznaczenie równania stycznej do okręgu w punkcie A i B.
$l\colon\ 3x-4y+8=0,\ k\colon\ 4x-3y+7=0$.

4p. Wyznaczenie współrzędnych punktu przecięcia się stycznych $E=\left(-\frac{4}{7};\frac{11}{7}\right)$.

5p. Obliczenie pola $\triangle\, ABS$: $P=\frac{7}{2}$.

6p. Obliczenie pola $\triangle\, ABE$: $P=\frac{1}{14}$ i obliczenie pola czworokąta $ASBE$: $P=\frac{25}{7}$.