



Miejskie Centrum Wspomagania
Edukacji w Opolu

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

--	--	--

PESEL

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

DLA KLASY IV LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCEGO

LUTY 2023

POZIOM ROZSZERZONY

CZAS PRACY: 180 MINUT

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: 50

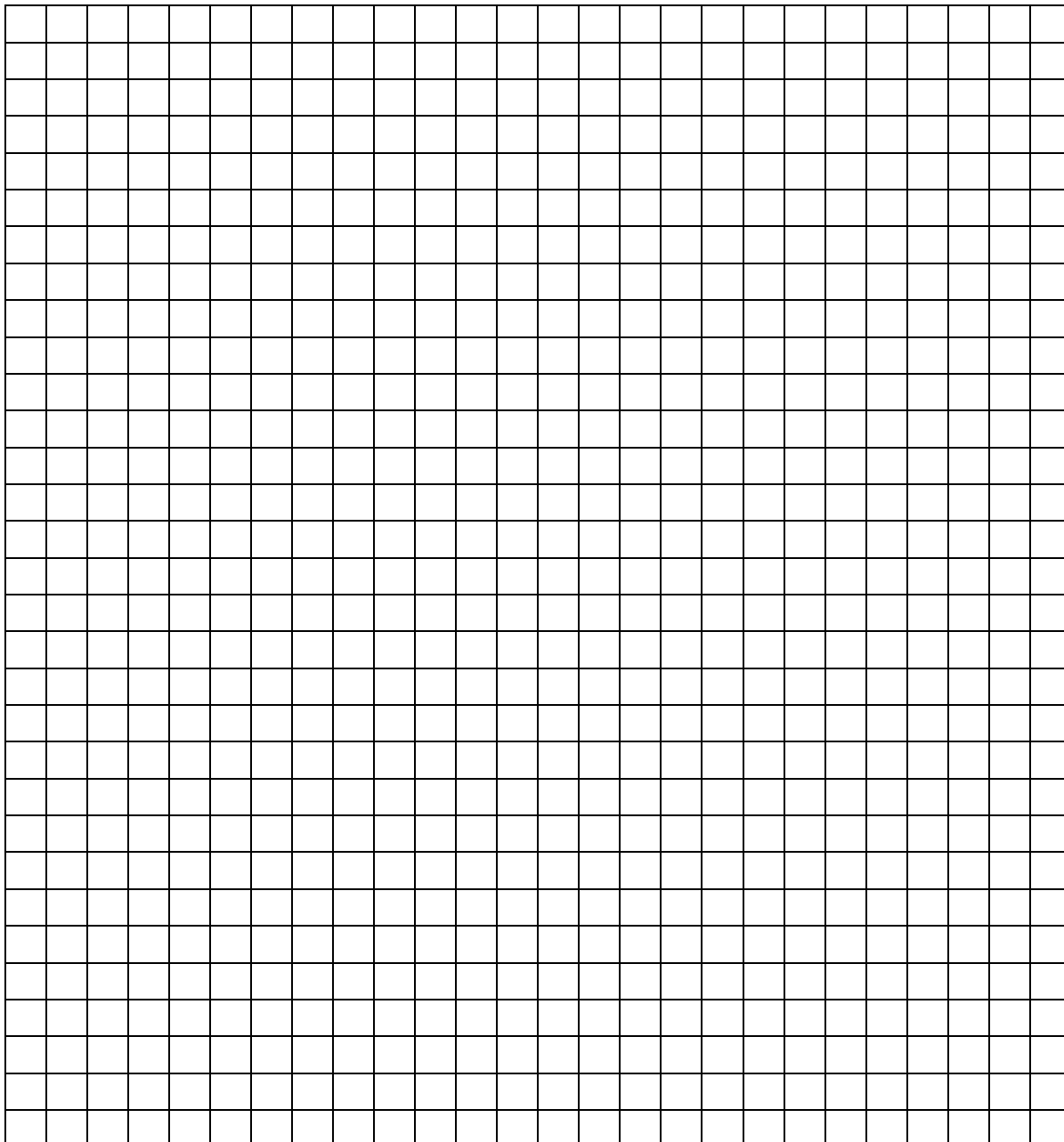
Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 1–12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisz w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
7. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

Zadanie 1. (0-2)

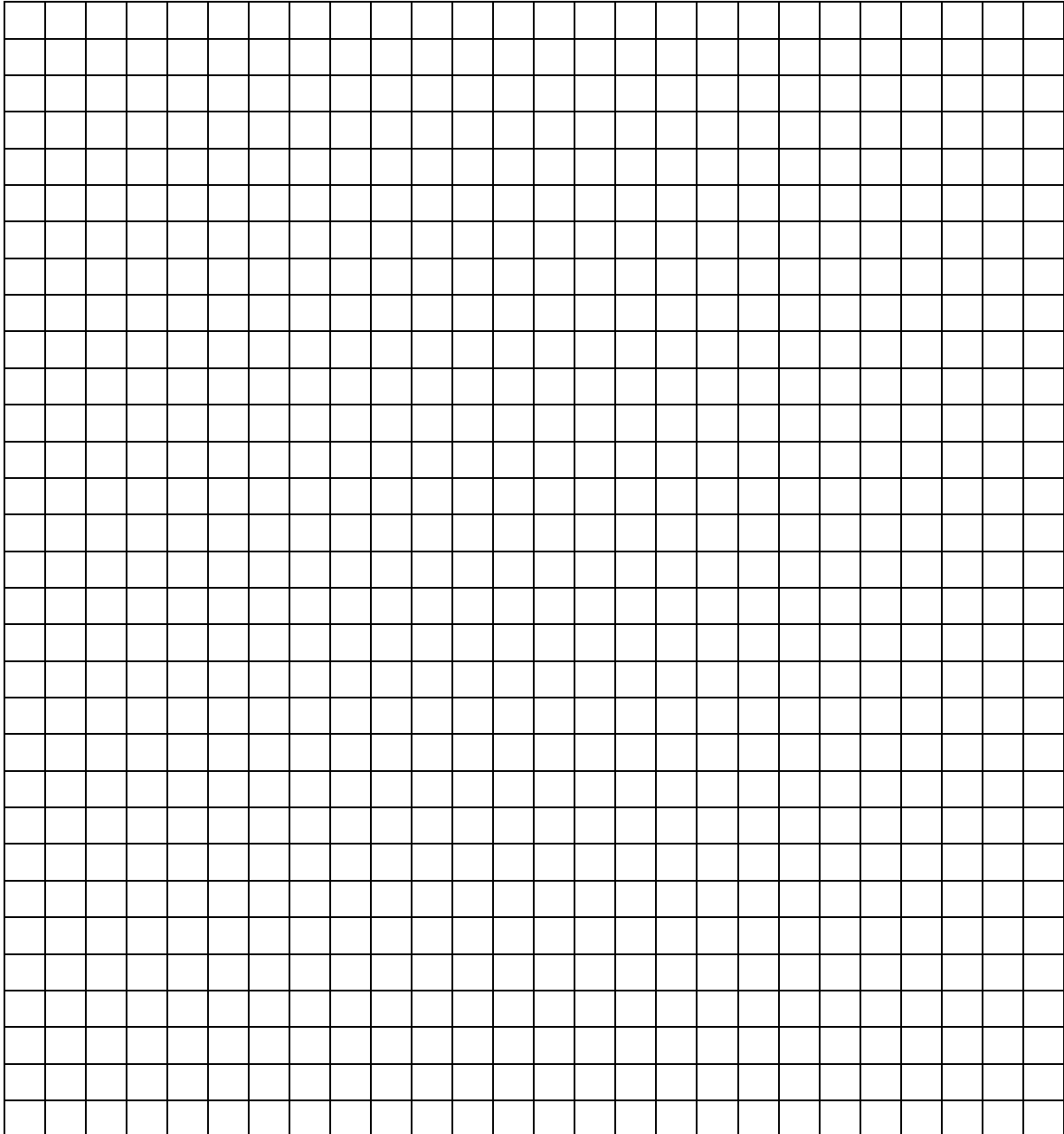
Oblicz $\lim_{x \rightarrow 5^-} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{2(x+1)}{x^2-25} \right)$.

Zapisz obliczenia.



Zadanie 2. (0-3)

Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = (m^2 + 2m - 8)x + m^2 + 5m$ jest rosnąca i jej miejscem zerowym jest liczba ujemna?



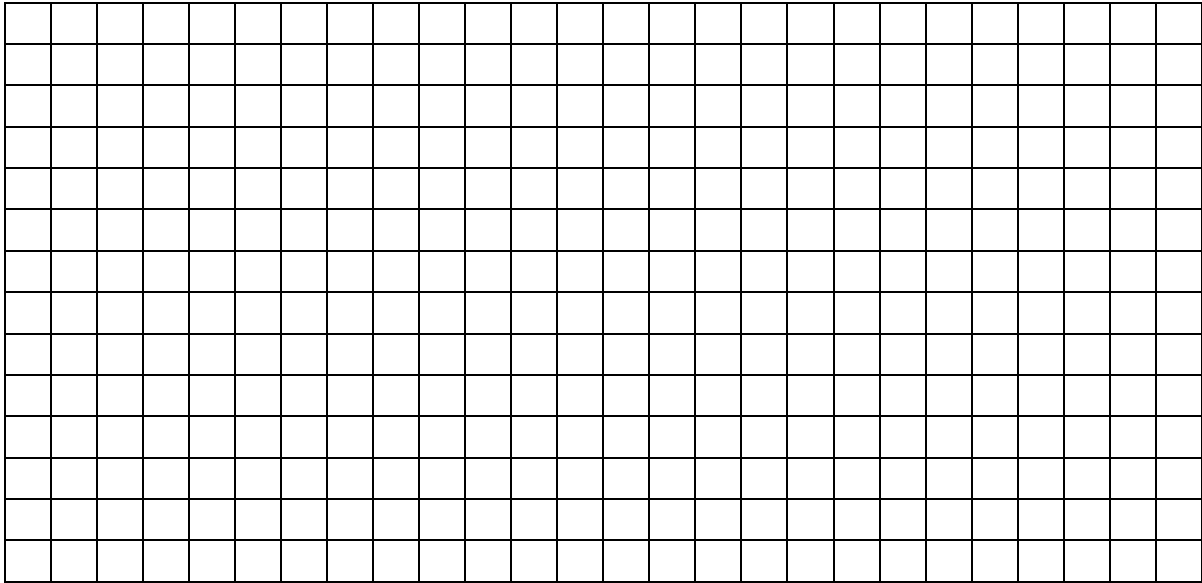
Zadanie 3.

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = x + \frac{4}{x+5}$, $x \in \mathbb{R} - \{-5\}$.

Zadanie 3.1. (0-3)

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

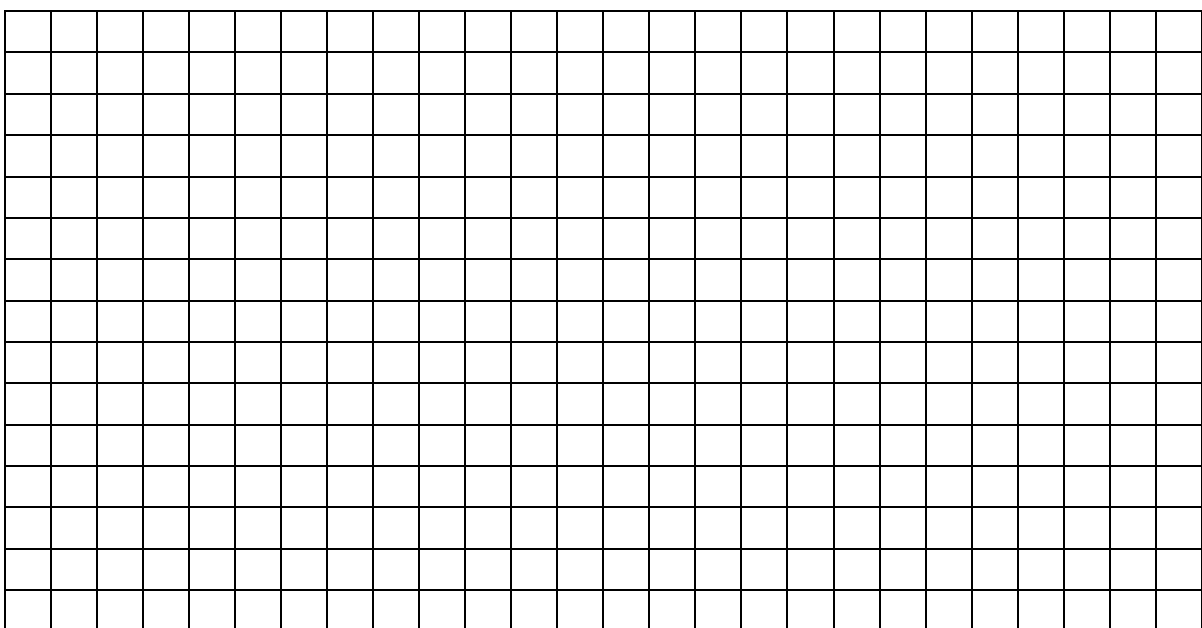
Zapisz obliczenia



Zadanie 3.2. (0-2)

Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej $x = 0$.

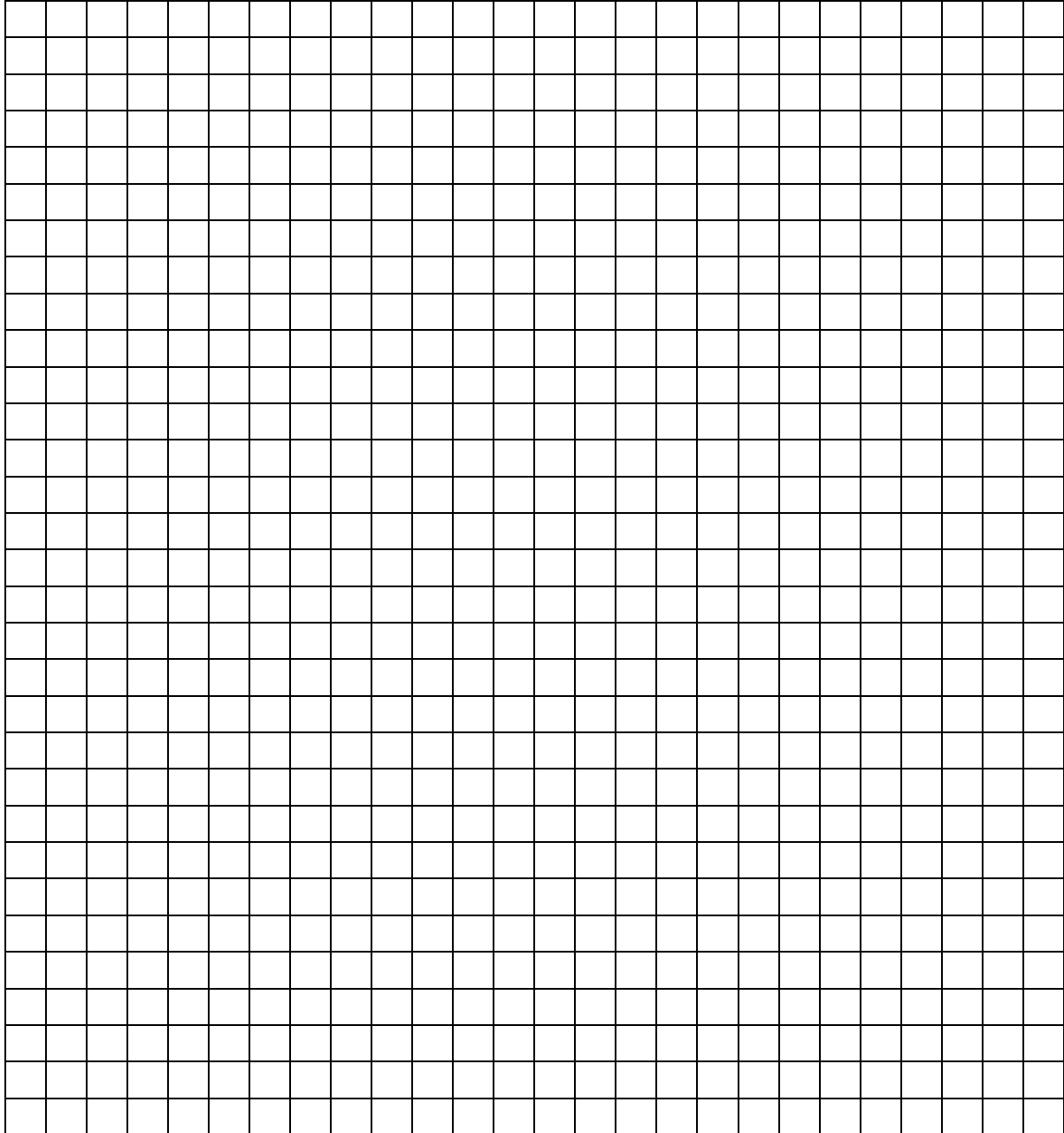
Zapisz obliczenia.



Zadanie 4. (0-3)

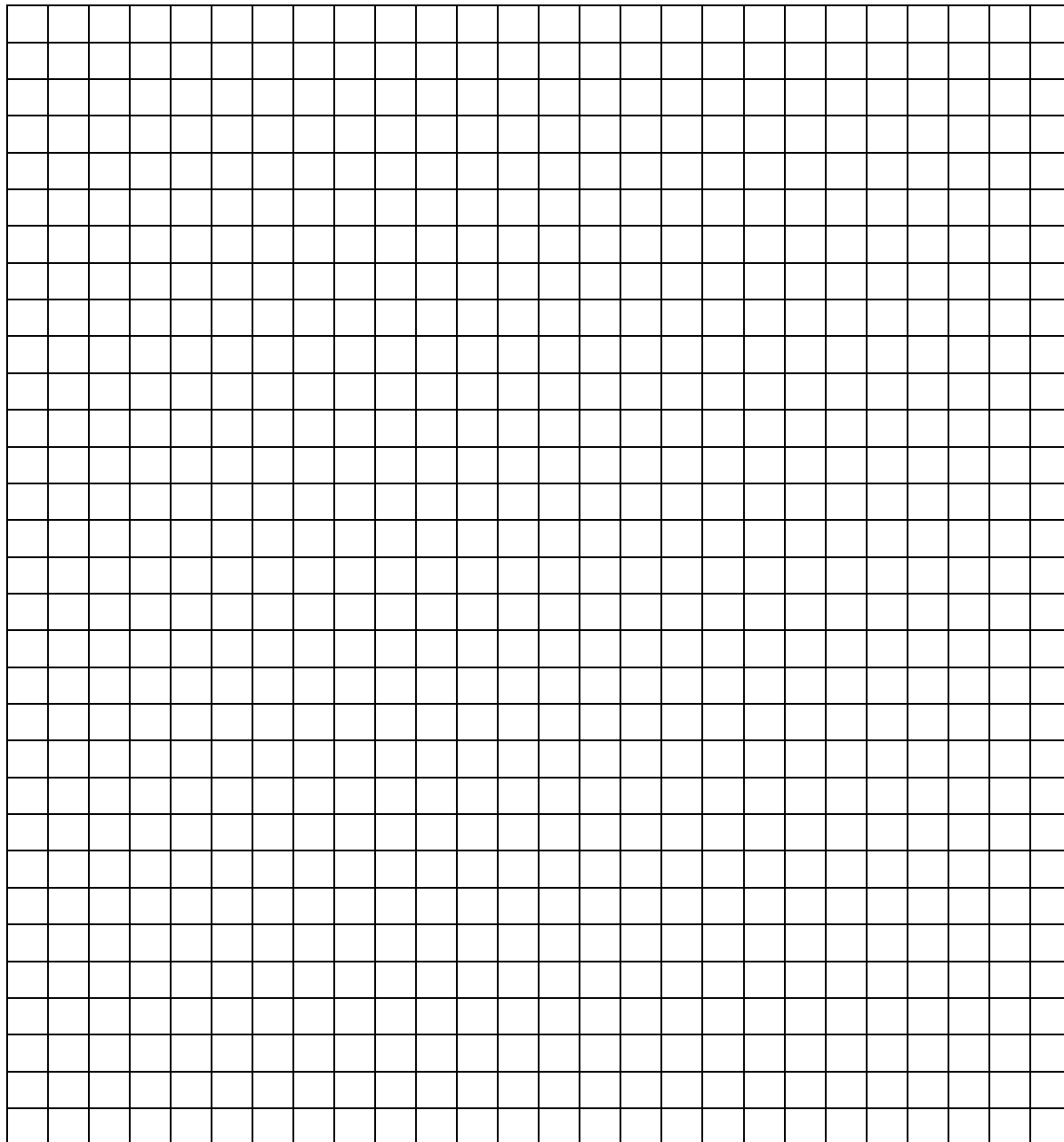
Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$(x^3 - 3x^2 + 3x)(x - 1) + 1 \geq x.$$



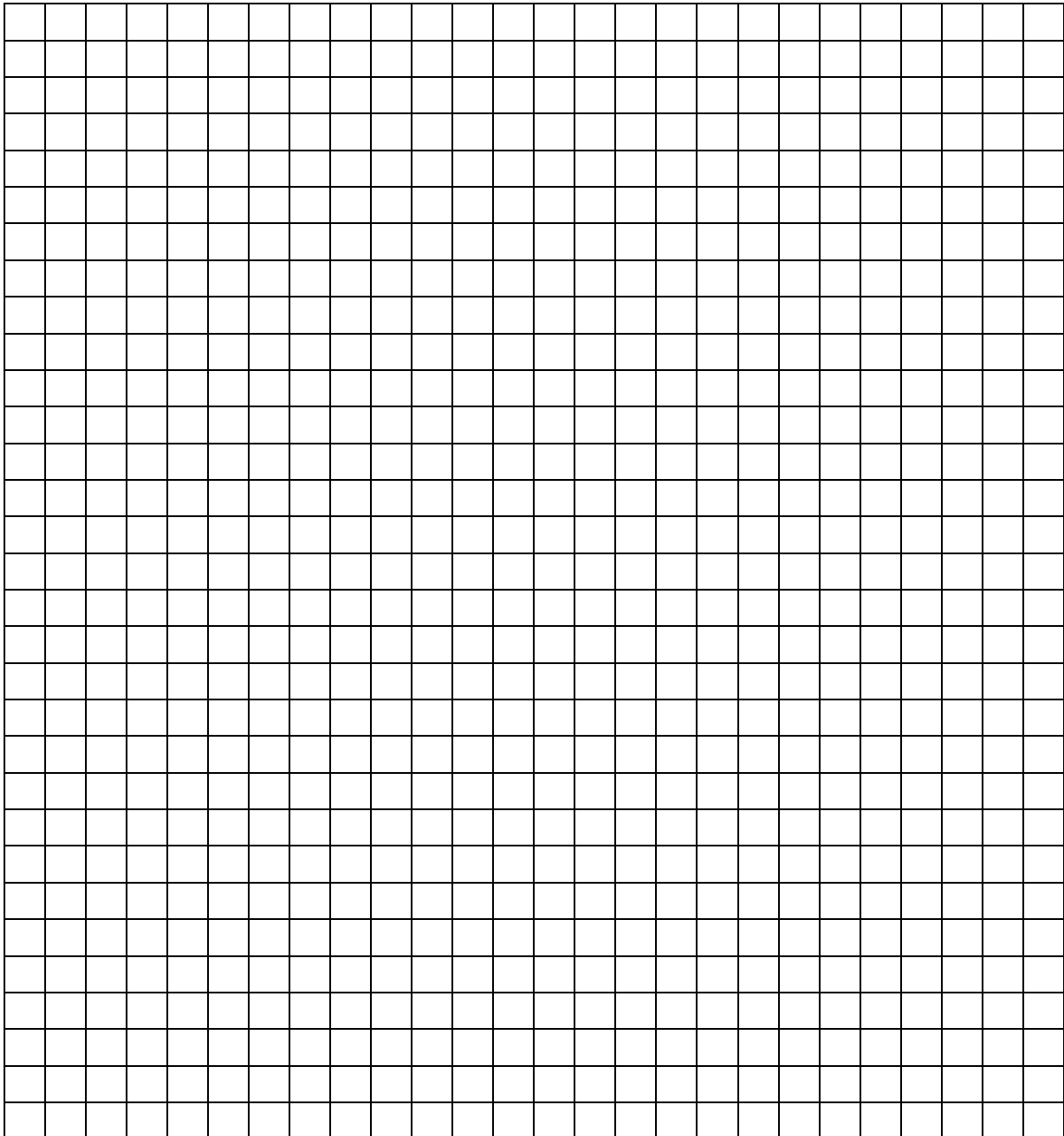
Zadanie 5. (0-4)

Rozwiąż równanie $4 \cos^2 x = \frac{4 \cos x - \sin 2x}{\cos x}$ w przedziale $[0, 2\pi]$.



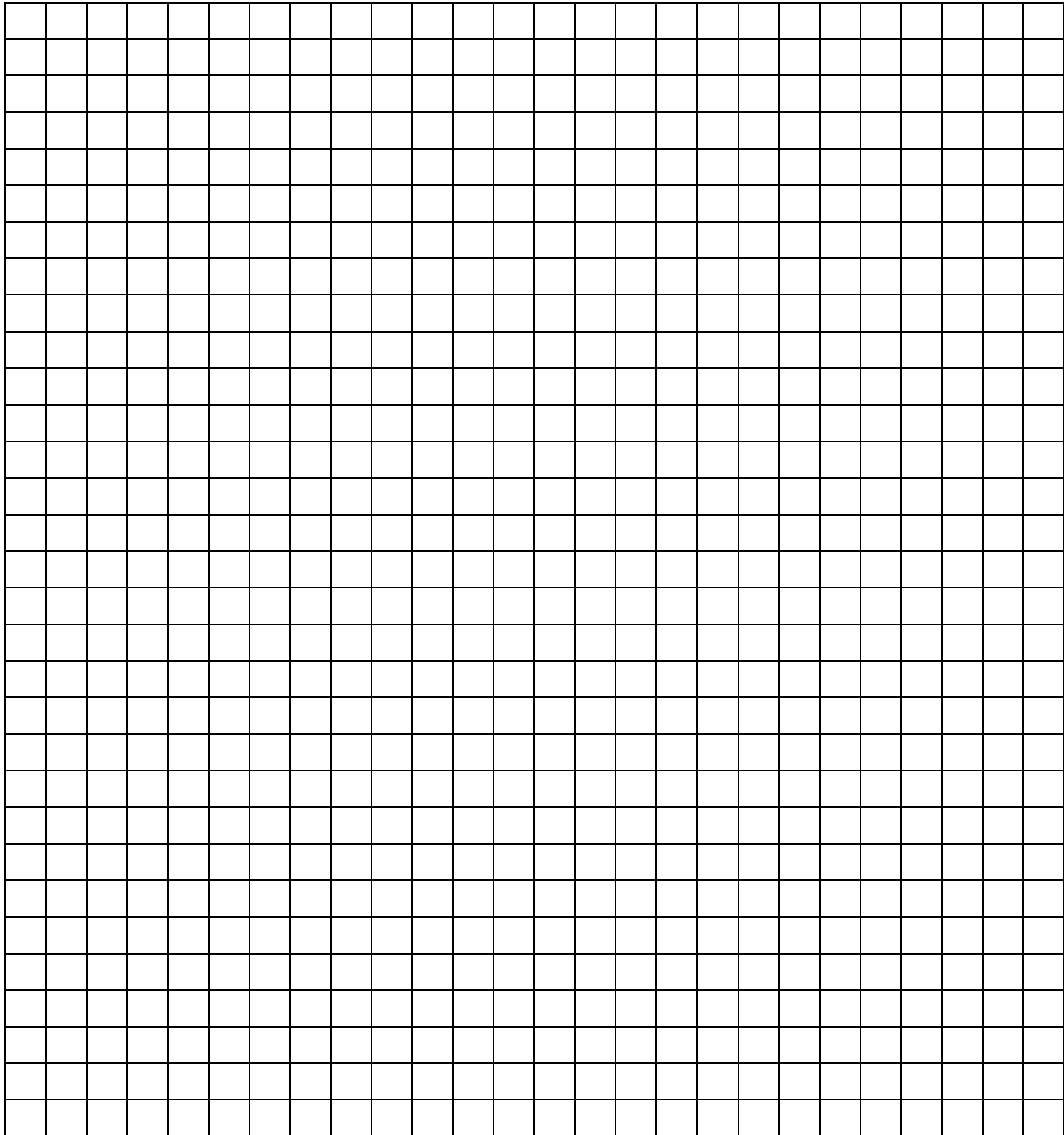
Zadanie 6. (0-3)

Wykaż, że jeżeli w trójkącie stosunek długości jednego z boków do cosinusa kąta przeciwległego jest równy stosunkowi długości innego boku do cosinusa jemu przeciwległego, to trójkąt jest równoramienny.

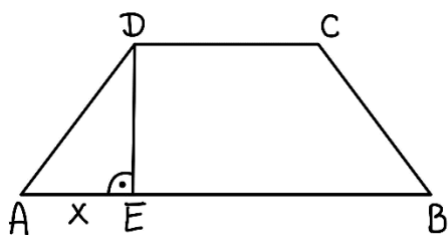


Zadanie 8. (0-5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $(x - 4)[x^2 + (m - 3)x + m^2 - m - 6] = 0$ ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2, x_3 spełniające warunek $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5m - 51$?



Zadanie 9.

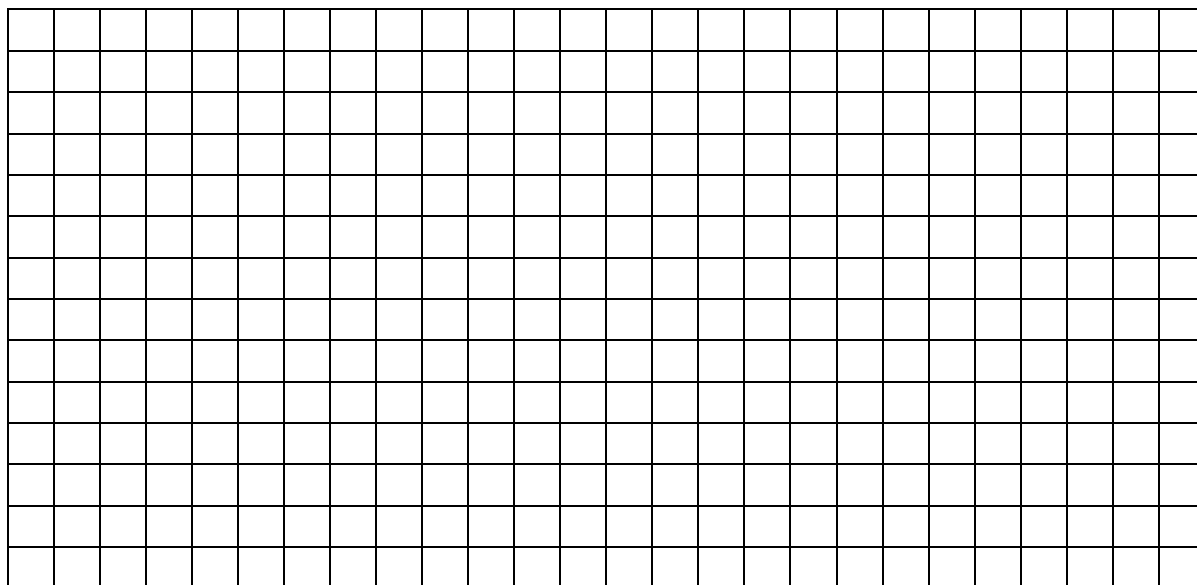


Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne $ABCD$, w których krótsza podstawa ma długość $2a$ i jest dwa razy dłuższa od ramienia (rys. obok).

Zadanie 9.1 (0-3)

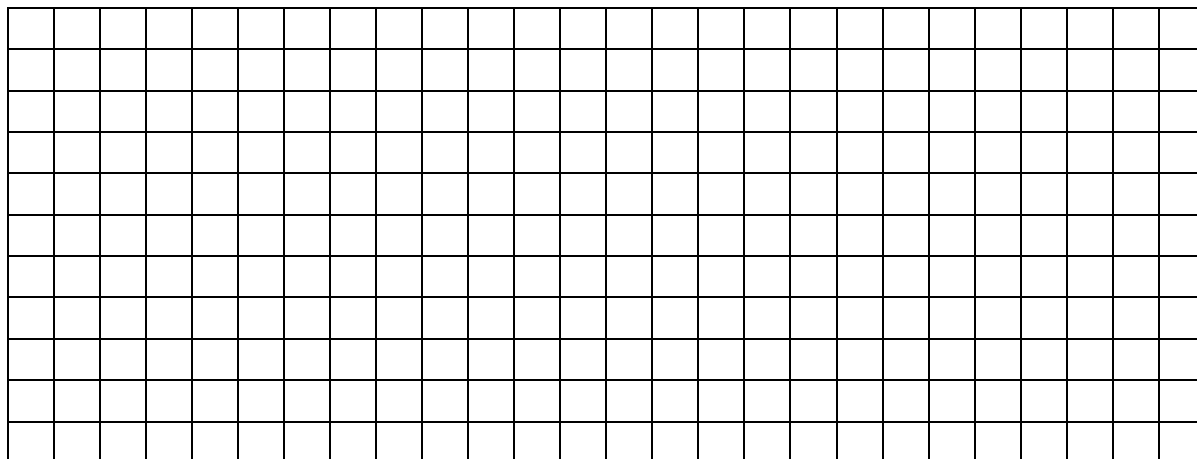
Wykaż, że pole P każdego z tych trapezów jako funkcja zmiennej x określona jest wzorem

$$P(x) = \sqrt{(2a + x)^2(a^2 - x^2)}, \text{ gdzie } x \text{ oznacza długość odcinka } AE.$$



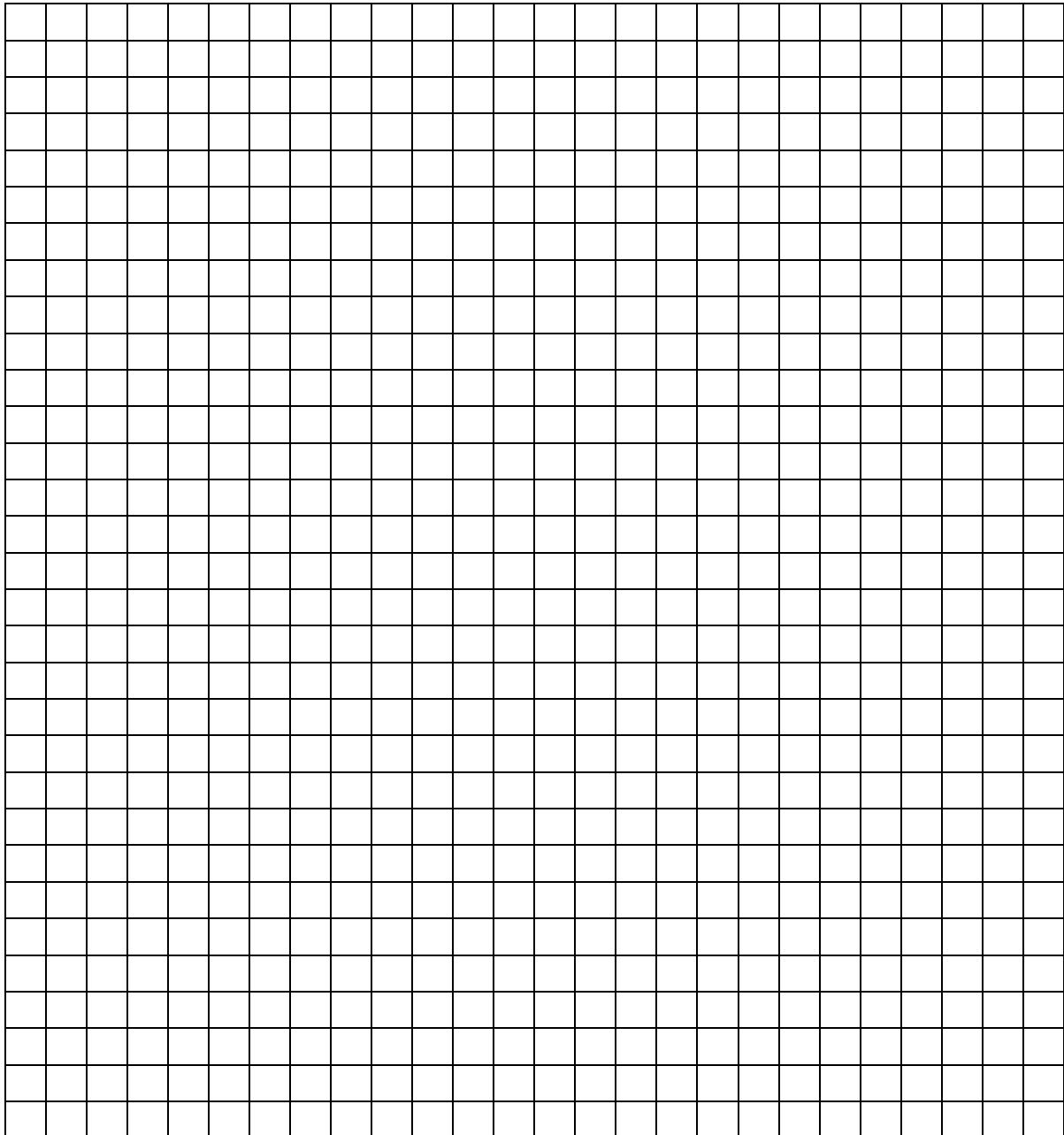
Zadanie 9.2 (0-4)

Wyznacz dziedzinę funkcji P . Oblicz długość odcinka x , dla którego pole trapezu jest największe.



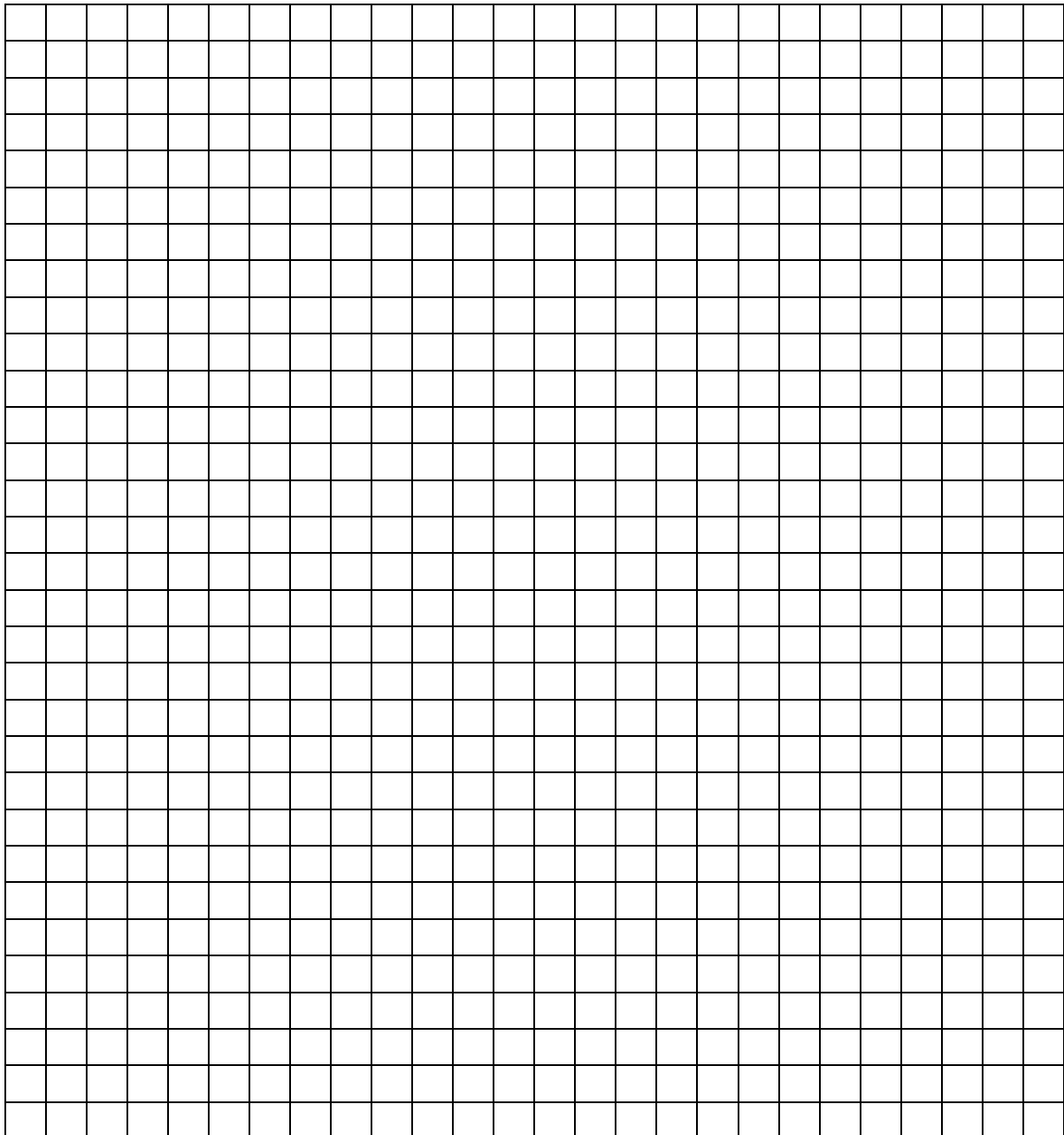
Zadanie 11. (0-4)

Ostrosłup prawidłowy czworokątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek ostrosłupa i środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy. Oblicz pole otrzymanego przekroju, jeżeli krawędź podstawy ma długość a , ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60° .



Zadanie 12. (0-6)

Wyznacz równania stycznych do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$, poprowadzonych w punktach przecięcia się okręgu z prostą $x - y + 2 = 0$. Oblicz pole czworokąta, którego wierzchołkami są punkty styczności, środek okręgu oraz punkt przecięcia się tych stycznych.



Brudnopis.

