Zadanie 1. (0–2)

Oblicz wartość wyrażenia $\left(\log_5 \sqrt[4]{125}\right)^m$, gdzie $m = \log_{49} 27 \cdot \log_3 7$.
Zapisz obliczenia.

Obliczenie $m = \frac{3}{2}$ lub podstawy potęgi $\frac{3}{4}$	1
Obliczenie wyniku $\frac{3\sqrt{3}}{8}$	1

Zadanie 2. (0–3)

Oblicz ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, w zapisie których nie występuje cyfra zero, pewna cyfra nieparzysta występuje na dwóch różnych pozycjach, a pozostałe cyfry są parzyste i są różne.

Zapisz obliczenia.

Obliczenie wszystkich możliwości umiejscowienia wybranej cyfry nieparzystej $C_6^2 = 15$	1
Obliczenie wszystkich możliwych umiejscowienia cyfry nieparzystej $C_5^1 \cdot C_6^2 = 75$	1
Rozwiązanie pełne $C_5^1 \cdot C_6^2 \cdot P_4 = 75 \cdot 24 = 1800$	1

Zadanie 3.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{5x^2 - 1}{x^2 + 3x + 4}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Prosta określona równaniem $y = 2$ przecina wykres funkcji f w dwóch punktach A i B.

Zadanie 3.1 (0–2)

Wyznacz współrzędne punktów A i B.
Zapisz obliczenia.

Obliczenie rzędnych punktów wspólnych lub współrzędnych jednego z punktów	1
Obliczenie współrzędnych obu punktów wspólnych $(-1,2)$ i $(3,2)$	1

Zadanie 3.2 (0–2)

Wykaż, że styczne do wykresu funkcji f poprowadzone w punktach A i B mają wspólne miejsce zerowe.

Obliczenie pochodnej $f(x) = \frac{15x^2 + 42x + 3}{\left(x^2 + 3x + 4\right)^2}$, współczynników kierunkowych stycznych $f'(-1) = -6$, $f'(3) = \frac{6}{11}$ lub obliczenie pochodnej i wyznaczenie równania jednej ze stycznych	1
Wyznaczenie równań stycznych $y = -6x - 4$ oraz $y = \frac{6}{11}x + \frac{4}{11}$ i wykazanie ich wspólnego miejsca zerowego $x_0 = -\frac{2}{3}$	1

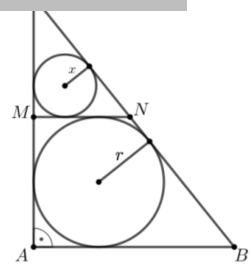
Zadanie 4. (0–3)

Wykaż, że dla każdych liczb rzeczywistych x i y spełniających warunek $x > 3y$, prawdziwa jest nierówność $x^3 - 24y^3 \geq 9xy^2 - 3x^2y + 3y^3$.

Dodanie wyrazów podobnych i zastosowanie wzoru na sumę sześcianów $x^3 - 27y^3 = (x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$	1
Wyłączenie przed nawias czynnika $3xy(3y-x)$ i uzyskanie postaci iloczynowej $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)+3xy(x-3y)\geq 0,\ (x-3y)(x^2+6xy+9y^2)\geq 0$	1
Wykazanie nieujemności iloczynu na podstawie założenia i nieujemności kwadratu	1

Zadanie 5.

W trójkąt prostokątny *ABC* o bokach długości $|AB| = a$, $|AC| = b$, i $|BC| = c$, gdzie $a \leq b < c$, wpisano okrąg o promieniu długości *r*. Następnie poprowadzono styczną do tego okręgu równoległą do boku *AB*, która przecięła boki *AC* i *BC* w punktach odpowiednio *M* i *N*. W trójkąt *MNC* wpisano okrąg o promieniu długości *x* (zobacz rysunek).



Zadanie 5.1 (0–2)

Uzasadnij, że $r = \dfrac{ab}{a+b+c}$.

Zapisanie wzoru $P = r \cdot p = r \cdot \dfrac{a+b+c}{2}$	1
Zapisanie wzoru $P = \dfrac{1}{2}ab$ i obliczenie z przyrównania $r = \dfrac{ab}{a+b+c}$	1

Zadanie 5.2 (0–2)

Wykaż, że $x = \dfrac{a \cdot (c-a)}{a+b+c}$.

Obliczenie $|CM| = b - 2r = b - 2\dfrac{a+b-c}{2} = c - a$ i wyznaczenie skali podobieństwa trójkątów $k = \dfrac{|CM|}{|AC|} = \dfrac{b-2r}{b} = \dfrac{c-a}{b}$	1
Obliczenie na podstawie skali $x = \dfrac{c-a}{b} \cdot r = \dfrac{c-a}{b} \cdot \dfrac{ab}{a+b+c} = \dfrac{a(c-a)}{a+b+c}$	1

Zadanie 6. (0–3)

Pan Karol ma obecnie 50 lat. W wieku 60 lat zamierza wykupić polisę na życie, której koszt obecnie ubezpieczyciel szacuje na 8188 zł (taka jest prognozowana cena polisy za 10 lat). Pan Karol postanowił pewną kwotę *k* pieniędzy ulokować na lokacie w banku świadczącym korzystne oprocentowanie rosnące. W ostatnim dziesiątym roku oszczędzania oprocentowanie lokaty wynosi 50% w stosunku rocznym, a każdym roku wcześniejszym jest o połowę mniejsze niż w roku następnym, czyli w roku dziewiątym wynosi 25%, a w roku ósmym 12,5%, itd. Odsetki naliczane przez bank nie są dopisywane do wkładu własnego, więc nie podlegają oprocentowaniu.

Jaką kwotę k powinien wpłacić do banku pan Karol, aby po 10 latach oszczędzania dysponować kwotą równą prognozowanej cenie polisy 8188 zł?

Zapisz obliczenia.

Ustalenie odsetek należnych w pierwszym roku oszczędzania $\frac{1}{2^{10}} \cdot k$	1
Zapisanie wzoru na wyraz ogólny ciągu, którego kolejne wyrazy są równe odsetkom w kolejnych latach $a_n = \frac{k}{2^{11-n}}$ lub $a_n = \frac{k}{2^n}$ (od końca)	1
Obliczenie łącznej kwoty odsetek $S_{10} = \frac{1}{2} k \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\frac{1}{2}} = k \cdot \frac{1023}{1024}$ i rozwiązanie równania $k + k \cdot \frac{1023}{1024} = 8188$, $k = 4096$	1

Zadanie 7 (0–4)

Rozwiąż równanie $4\cos^2 x - 2\sin^2 2x = 0$ w przedziale $[0, \pi]$.

Zapisz obliczenia.

Wykorzystanie wzoru na sinus kąta podwojonego $4\cos^2 x - 8\sin^2 x \cos^2 x = 0$	1
Przekształcenie do postaci iloczynowej $\cos^2 x \cdot (1 - 2\sin^2 x) = 0$	1
Rozwiązanie równania $\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$	1
Rozwiązanie równania $\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3}{4}\pi$	1

Zadanie 8 (0–6)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (7, -1)$ oraz B należą do okręgu O. Prosta o równaniu $3x - 4y = 0$ jest symetralną cięciwy AB tego okręgu, a odległość środka okręgu O od cięciwy AB jest równa 5. Wyznacz równanie okręgu O.

Zapisz obliczenia.

Wyznaczenie równania prostej zawierającej punkt A i prostopadłej do symetralnej: $4x + 3y - 25 = 0$	1
Wyznaczenie punktu przecięcia obu prostych $C = (4, 3)$	1
Zapisanie równania okręgu $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$	1
Rozwiązanie układu równań $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \vee (x, y) = (8, 6)$	2

Podanie odpowiedzi $(x-8)^2+(y-6)^2=50$ lub $x^2+y^2=50$	1

Zadanie 9. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $(m-1)x^2-mx-2m+5=0$ ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunek $x_1^3+x_2^3>\frac{m}{(m-1)^2}$.

Zapisz obliczenia.

$\Delta>0 \Leftrightarrow m\in\left(-\infty,\frac{10}{9}\right)\cup(2,+\infty)$ (odpowiedź nieprecyzyjna)	1
$\Delta>0 \Leftrightarrow m\in(-\infty,1)\cup\left(1,\frac{10}{9}\right)\cup(2,+\infty)$ (odpowiedź prawidłowa)	1
Zapisanie warunku $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)$	1
Uzyskanie postaci $\frac{m}{m-1}\left(\frac{m^2}{(m-1)^2}-3\frac{5-2m}{m-1}\right)>\frac{m}{(m-1)^2} \Leftrightarrow m(m-1)(m-2)(7m-8)>0$	1
Podanie prawidłowej odpowiedzi $m\in(-\infty,0)\cup\left(1,\frac{10}{9}\right)\cup(2,+\infty)$	1

Zadanie 10. (0–3)

Ciąg (b_n) określony dla każdej dodatniej liczby naturalnej n jest ciągiem geometrycznym malejącym, w którym $b_2=24$ oraz spełniony jest warunek $5b_8=6b_7-4b_9$. Ciąg (a_n) określony dla każdej dodatniej liczby naturalnej n jest ciągiem arytmetycznym, którego suma dziewięciu kolejnych początkowych wyrazów jest równa 225% sumy wszystkich wyrazów ciągu (b_n). Wiedząc, że $a_1=b_2$, wyznacz wyraz ogólny ciągu arytmetycznego.

Zapisz obliczenia.

Wyznaczenie ilorazu ciągu $5b_1q^7=6b_1q^6-4b_1q^8 \Leftrightarrow q=\frac{3}{4}$, bo $b_1\neq 0 \wedge q\neq 0$	1
Zapisanie warunku $S_9=\frac{24+a_9}{2}\cdot 9=\frac{9}{4}\cdot\frac{32}{\frac{1}{4}}=\frac{9}{4}\cdot 128=288$ i obliczenie $a_9=40$	1
Obliczenie $r=\frac{40-24}{8}=2$, $a_n=24+(n-1)\cdot 2=2n+22$	1

Zadanie 11. (0–4)

Rozwiąż układ równań:

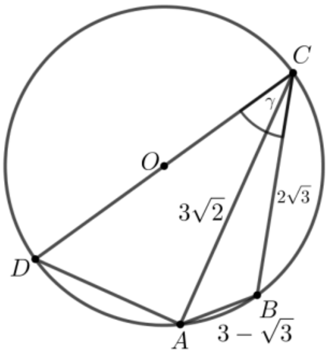
$$\begin{cases} 2x^2+2y^2=16x+10y \\ 4x^2+4y^2=24x+12y \end{cases}.$$

Zapisz obliczenia.

Przemnożenie pierwszego równania przez -2 lub 2	1
Uzyskanie zależności $-8x-8y=0$, $x=-y$	1
Rozwiązanie równania $2x^2+2x^2=16x-10x$, $4x^2-6x=0$, $x=0 \vee x=\frac{3}{2}$	1
Podanie rozwiązania $(x,y)=(0,0)$ lub $(x,y)=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$	1

Zadanie 12. (0-4)

W czworokącie *ABCD* dane są długości boków $|AB|=3-\sqrt{3}$ i $|BC|=2\sqrt{3}$. Przekątna *AC* czworokąta ma długość $|AC|=3\sqrt{2}$, a jego bok *CD* jest średnicą okręgu opisanego na tym czworokącie.
Oblicz pole powierzchni czworokąta *ABCD*.
Zapisz obliczenia.



Obliczenie $\cos\angle B=-\frac{1}{2}$, $|\angle B|=120°$	1
Wyznaczenie $P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}\right)\cdot\sin 120°=\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$	1
Zapisanie $|\angle B|=120°$, $|\angle D|=60°$, $|\angle DAC|=90°$	1
Obliczenie $P_{\Delta DAC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot 3\sqrt{2}=\frac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$ i $P_{ABCD}=3\sqrt{3}+\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}$	1

Zadanie 13. (0–5)

Rodzina państwa Winnickich prowadzi niewielki zakład wytwarzający ozdoby świąteczne. Jedną z nich jest choinka wycinana z drewnianej sklejki. Materiałem na choinkę jest prostokątny arkusz sklejki, z którego wycina się 5 takich choinek.

Badania rynku pokazały, że związek między ilością wytwarzanych choinek, a ceną jaką można uzyskać **za jedną sztukę** opisuje wzór $c(x)=\frac{3000x-3000}{x^2}$, gdzie $x\in\langle 5,20\rangle$ jest ilością wytwarzanych choinek w ciągu dnia (choinka nie musi być w całości wycięta).

Dzienne koszty produkcji, uwzględniające koszty zakupu materiału, w zależności od dziennej produkcji *x* sztuk choinek opisuje wzór $k(x)=50x-x^2$, gdzie $x\in\langle 5,20\rangle$.

Dzienny zysk z produkcji (dochód) obliczamy odejmując od uzyskanego ze sprzedaży przychodu koszty jego uzyskania (koszty produkcji). Ile choinek dziennie powinni wytwarzać państwo Winniccy, aby dzienny zysk z produkcji choinek był maksymalny?

Zapisz obliczenia.

Podanie funkcji zysku $f(x)=x\cdot\frac{3000x-3000}{x^2}-50x+x^2=x^2-50x+\frac{3000x-3000}{x}$ $f(x)=x^2-50x+3000-\frac{3000}{x},\ x\in\langle 5,20\rangle$	1
Obliczenie pochodnej $f'(x)=2x-50+\frac{3000}{x^2},\ x\in(5,20)$	1
Wyznaczenie jednego miejsca zerowego pochodnej $2x-50+\frac{3000}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^3-25x^2+1500=0 \ \Rightarrow\ x=10$	1
Wyznaczenie pozostałych miejsc zerowych $x_2=\frac{15-5\sqrt{33}}{2}$ oraz $x_3=\frac{15+5\sqrt{33}}{2}$ i stwierdzenie, że nie należą do dziedziny funkcji i pochodnej	1
Analiza znaku pochodnej funkcji w przedziale $(5,20)$ i uzasadnienie, że *f* ma maksimum globalne w $x=10$ oraz podanie odpowiedzi 10	1