Miejskie Centrum Wspomagania Edukacji w Opolu

Miejski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli w Miejskim Centrum Wspomagania Edukacji w Opolu

WYPEŁNIA ZDAJĄCY	
KOD	PESEL

Egzamin maturalny *Formuła 2023*

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Próbna Matura Kwiecień 2025

DATA: **kwiecień 2025**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

INSTRUKCJA DLA ZDAJĄCEGO

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 16 stron (zadania 1.-14.). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego.
2. Na pierwszej stronie arkusza wpisz swój PESEL i kod.
3. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń może spowodować, że za to zadanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

Powodzenia

Zadanie 1. (0-3p.)

Wyznacz n z równania $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{k} \cdot \frac{n-k+1}{6}$, jeśli wiadomo, że $n, k \in N$ oraz $n \geq k$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-2p.)

Oblicz granicę ciągu liczbowego $a_n=\sqrt[n]{(\frac{6}{7})^n + 1 + (\frac{9}{7})^n}$;

$n \geq 1$; $n \epsilon N.$ Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0-3p.)

Oblicz długość wektora $\vec{a} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$, znając punkty

$A = (-5,3), B = (4,2)$ oraz wektor $\overrightarrow{BC} = [3, -1]$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0-4p.)

Rozwiąż nierówność $|x^2 - 4| - \sqrt{4 - 4x + x^2} \leq 9$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0-3p.)

Wykaż, że jeśli x, y, z są trzema dodatnimi liczbami takimi,

że $x \cdot y \cdot z = 1$, to prawdziwa jest nierówność $(1+x)(1+y)(1+z) \geq 8$.

Zadanie 6. (0-3p.)

W grupie sportowców jest dziesięciu narciarzy, trzech łyżwiarzy i dwóch saneczkarzy. Prawdopodobieństwo, że wygrają zawody wynosi: dla narciarzy 0,9; dla łyżwiarzy 0,8; dla saneczkarzy 0,9. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany sportowiec wygra zawody i jest nim łyżwiarz.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0-4p.)

Suma S_3 trzech początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 14, zaś suma wszystkich wyrazów tego ciągu wynosi 16. Wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu. Oblicz, dla jakich $n \epsilon N_+$ spełniony jest warunek $S - S_n \geq \frac{1}{4}$.

Zadanie 8. (0-4p.)

Rozwiąż równanie:

$$2\sin^2(3x) + \sin^2(6x) = 2$$

dla $x \in [0,2\pi]$.

Zadanie 9. (0-5p.)

Dane jest równanie $mx^2 + (m+3)x + 2 - m = 0$. Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m, dla których równanie ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $|x_1| + |x_2| \leq 1$.

Zadanie 10. (0-3p.)

W okrąg o promieniu R wpisano czworokąt $ABCD$ tak, że przekątna AC jest średnicą tego okręgu i tworzy z bokami AD i AB odpowiednio kąty $30°$ i $45°$. Oblicz długość drugiej przekątnej BD tego czworokąta.

Zadanie 11. (0-4p.)

Dane są okręgi o równaniach:

$O_1: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$ i $O_2: x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia się tych okręgów. Oblicz pole czworokąta AO_1BO_2, gdzie A, B są punktami przecięcia się tych okręgów, a O_1, O_2 – środkami podanych okręgów.

Zadanie 12. (0-3p.)

Wykaż, że jeśli suma kwadratów długości dwóch środkowych trójkąta równa się pięciokrotnemu kwadratowi długości trzeciej środkowej, to trójkąt jest prostokątny.

Zadanie 13. (0-3p.)

Przekrój czworościanu foremnego jego płaszczyzną symetrii ma pole równe $4\sqrt{2}cm^2$.
Oblicz objętość tego czworościanu.

Zadanie 14.

Rozważmy wszystkie figury obrotowe otrzymane w wyniku obrotu trapezu równoramiennego o obwodzie 10 wokół dłuższej podstawy, wiedząc, że długość tej podstawy jest równa 4.

Zadanie 14.1 (0-2p.)

Wykaż, że pole powierzchni całkowitej rozważanej figury obrotowej określa się wzorem $P(x) = 2\pi(x+3)\sqrt{5-2x}, x \epsilon (0,2)$, gdzie x oznacza połowę krótszej podstawy.

Zadanie 14.2 (0-4p.)

Pole powierzchni całkowitej rozważanej figury obrotowej określa się wzorem: $P(x) = 2\pi(x+3)\sqrt{5-2x}, x \epsilon (0,2)$, gdzie x oznacza połowę krótszej podstawy.

Oblicz jakie wymiary powinien mieć ten trapez, aby pole powierzchni całkowitej otrzymanej bryły było największe.