Próbny egzamin maturalny nr 2 (p. rozszerzony) kwiecień 2020

1. Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności
$$\left|\frac{1}{3-x}\right| \leq \left|\frac{12}{(x+5)(6-2x)}\right| \text{ jest:}$$
A. $(-\infty,-11) \cup (1,\infty)$ B. $(-\infty,-11\rangle \cup \langle 1,3) \cup (3,\infty\rangle$
C. $\langle -11,-5) \cup (-5,1\rangle$ D. $\mathbb{R}-\{-5,\ 3\}$

2. Dana jest funkcja $f(x)=a+bx+cx^2-2x^3$, gdzie a,b,c są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Funkcja f ma ekstremum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy
A. $c=5 \wedge b=-5$ B. $b=c=-2$ C. $c^2>-6b$ D. $c^2<-6b$

3. Dany jest okrąg o równaniu $(x+4)^2+(y-3)^2=4$. Prosta styczna do okręgu i równoległa do prostej $y=x$ określa się równaniem:
A. $y=x+2\sqrt{2}$ B. $y=x-2\sqrt{2}$ C. $y=x+2\sqrt{2}-1$ D. $y=2x-4\sqrt{2}$

4. Trzy krawędzie ostrosłupa trójkątnego mają wspólny punkt i są do siebie parami prostopadłe i mają odpowiednio długości $3cm, 4cm, 5cm$. Objętość tego ostrosłupa jest równa:
A. $\frac{25\sqrt{3}}{4}\ cm^3$ B. $\frac{25\sqrt{3}}{3}\ cm^3$ C. $10\ cm^3$ D. $60\ cm^3$

5. W trapezie równoramiennym, którego pole jest równe $16\sqrt{2}cm^2$, przekątne przecinają się pod kątem $45°$. Przekątne w tym trapezie mają długość
A. $4\ cm$ B. $4\sqrt{2}\ cm$ C. $8\ cm$ D. $8\sqrt{2}\ cm$

6. Rzucamy dwa razy sześcienną symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma oczek jest większa lub równa 7, jeśli wiadomo, że za pierwszym razem wypadło 5 oczek. Zakoduj trzy pierwsze cyfry rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

7. Obrazem odcinka o końcach $A=(2,4), B=(4,8)$ w jednokładności o skali $s=-1$ względem początku dwóch współrzędnych jest odcinek $A'B'$. Wyznacz długość odcinka $A'B'$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

8. Wiedząc, że $\frac{\log 8}{\log 81} = a \wedge \frac{1}{\log 64} = b$. Oblicz wartość wyrażenia $27^{4a} + 16^{3b}$. Wynik podaj w najprostszej postaci.

9. Wykaż, że jeżeli $a > 0 \ \wedge \ b > 0 \ \wedge \ c > 0 \ \wedge \ a + b + c = 1$, to
$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 5$$

10. W trapezie równoramiennym $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$ oraz $|AB| = 2a$ i $|CD| = a$, przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta DAB. Wykaż, że promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC wyraża się wzorem $r = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$

11. Rozwiąż równanie $\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos 2x + \sin^2 x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\, x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

12. W okrąg o środku O i promieniu długości 4 wpisano czworokąt $ABCD$, w którym $|AB| = |BC|$ oraz $|\sphericalangle ADC| = 120°$. Stosunek pola trójkąta ADB do pola trójkąta DCB wynosi 3 : 1. Oblicz obwód i pole czworokąta $ABCD$.

13. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przekątne przecinają się w punkcie E. Wykaż, że pole powierzchni trójkąta AED jest średnią geometryczną pól trójkątów ABE i DEC.

14. Dla jakich rzeczywistych wartości parametrów a, b, c wielomian $W(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$?

15. Iloczyn wyrazu trzeciego i siódmego malejącego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 28, a przy dzieleniu wyrazu drugiego tego ciągu przez wyraz szósty otrzymujemy 3 i resztę 2. Oblicz sumę 13 początkowych wyrazów ciągu (a_n).

16. Punkty $A(0, -5)$ i $B(4, -2)$ są kolejnymi wierzchołkami rombu $ABCD$. Wierzchołek C należy do prostej o równaniu $x + y - 9 = 0$.
    a) Znajdź współrzędne punktów C i D.
    b) Oblicz cosinus kąta ostrego i pole rombu $ABCD$.
    c) Napisz równanie okręgu wpisanego w ten romb.

17. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \ldots, 15, 16\}$ losujemy kolejno trzy razy po jednej liczbie ze zwracaniem i oznaczamy kolejno wylosowane liczby a_1, a_2, a_3. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
    a) A – iloczyn $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ jest liczbą podzielną przez 3,
    b) B – suma $a_1 + a_2 + a_3$ jest liczbą podzielną przez 3.

18. Suma długości promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa prawidłowego trójkątnego i wysokości tego ostrosłupa jest równa 2. Znajdź tę wartość promienia okręgu, dla której ostrosłup ma największą objętość. Oblicz tę objętość.

Powodzenia