Próbny egzamin maturalny nr 1 (p. rozszerzony) kwiecień 2020

1. Podane są funkcje $f(x) = \frac{x}{x-1},\ x \neq 1;\ g(x) = x^2 - 1$. To $f'(\sqrt{2}-1) \cdot g(\sqrt{2}-1) + f(\sqrt{2}-1) \cdot g'(\sqrt{2}-1)$ jest równe

   A. $\sqrt{2}+1$ B. $\sqrt{2}-1$ C. $2\sqrt{2}-1$ D. $2\sqrt{2}+1$

2. Liczba $\frac{\cos 20° + \sqrt{3}\sin 20°}{4\sin 40°}$ jest równa

   A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Granica ciągu (a_n): $a_n = \sqrt{\frac{\binom{n+1}{n-1}}{1+5+9+\cdots+(4n-3)}}$ jest równa

   A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$

4. Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, które przy dzieleniu przez 13 dają resztę 11 jest

   A. 68 B. 69 C. 70 D. 76

5. W kąt o mierze $60°$ wpisano dwa okręgi styczne do jego ramion i styczne do siebie. Odległości środków mniejszego z okręgów od wierzchołka kąta wynosi 2. Różnica długości promieni tych okręgów jest równa:

   A. 1 B. $12+6\sqrt{3}$ C. $4+2\sqrt{2}$ D. 2

6. Dany jest ostrosłup $ABCDS$, którego podstawą jest trapez prostokątny $ABCD$, a wysokością krawędź AS. Wiedząc, że $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$ i $|AD| = |DC| = 5, |AB| = |AS| = 10$, oblicz pole ściany bocznej BCS. Zakoduj wynik, podając kolejno trzy pierwsze cyfry przybliżenia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

7. Dwunastu chłopców, w tym Andrzej i Bartek, dzielimy na dwie drużyny po 6 osób. Na ile sposobów można to uczynić tak, aby ci dwaj chłopcy znaleźli się w jednej drużynie. Zakoduj wynik podając cyfry: setek, dziesiątek i jedności.

8. Wykaż, że dla wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich a i b prawdziwa jest nierówność $a+b+\frac{a+b}{ab} \geq 4$.

9. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości $|AC| = a$, $|BC| = b$. Dwusieczna kąta prostego przecina przeciwprostokątną w punkcie D. Wykaż, że $|CD| = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

10. Rozwiąż równanie $\cos 3x \cdot \sin 9x = \cos 5x \cdot \sin 7x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

11. W nieskończonym ciągu geometrycznym o sumie równej 5 różnica między sumą wyrazów o wskaźnikach nieparzystych, a sumą wyrazów o wskaźnikach parzystych jest równa 2. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

12. Rozważmy zbiór ostrosłupów prawidłowych czworokątnych, których przekrój o polu P i obwodzie 40 zawiera przekątną podstawy i wysokość ostrosłupa. Znajdź wśród tych ostrosłupów ten, którego P jest największe. Oblicz jego objętość.

13. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = (x^2-1)(x+2)$, wiedząc, że $W(1) = -1, W(-1) = 1, W(-2) = -4$.

14. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami równania $mx^2 + (m+1)x + m = 0$ o niewiadomej x. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f określonej wzorem $f(m) = x_1^3 + x_2^3$.

15. Oblicz pole rombu $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie $M = (4,4)$, wiedząc, że punkty $A = (0,-1)$ oraz $P = (2,0)$ należą do prostej AB.

16. Doświadczenie polega na sześciokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymamy dokładnie cztery razy ściankę z pięcioma oczkami i jednocześnie iloczyn liczby oczek uzyskanych we wszystkich rzutach będzie liczbą parzystą.

Powodzenia