Miejski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli

**Próbny egzamin maturalny (odpowiedzi do arkusza nr. 5)**

maj 2020

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| NR ZADANIA | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ODPOWIEDŹ | C | C | C | B | A |

Zad. 6.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 8 | 7 | 4 |

Zad. 7.

Należy wykazać, że dla każdej liczby całkowitej x wielomian jest iloczynem pięciu kolejnych liczb całkowitych. , liczby 5, 3, 8 są względnie pierwsze.   
Iloczyn tych liczb jest liczbą podzielną przez 5, 3, 8.

Iloczyn pięciu kolejnych liczb całkowitych jest liczbą podzielną przez 120. W iloczynie pięciu kolejnych liczby całkowitych są dwie kolejne liczby parzyste, co najmniej jedna liczba podzielna przez 3, a także jedna liczba podzielna przez 5. Iloczyn dwóch kolejnych liczb parzystych jest podzielny przez 8. Zatem wartość wielomianu jest liczbą podzielną przez 5, 3 i 8, więc jest podzielna przez 120.

Zad. 8.

Z: α, β – kąty wewnętrzne trójkąta;

a, b, c – odcinki leżące naprzeciwko odpowiednich kątów.

A

C

B

c

b

a

α

β

T: .

D:

Z twierdzenia cosinusów w ΔABC wynika:

, to:

oraz

, to

Z twierdzenia sinusów w ΔABC wynika:

Wobec tego:

cnd.

Zad. 9.

Z: D jest środkiem odcina AB, F – środkiem odcinka CD.

D

C

B

A

H

G

E

F

Poprowadzimy prostą BG równoległą do prostej CD.

T: |BE|=2|CE|

D: z twierdzenia Talesa wynika, że:

Z założenia |DF|=|FC|

i punkty B, H, G są współliniowe, to H jest środkiem odcinka BG.

Zatem => |BE|=2|CE|

cnd.

Zad. 10.

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie trzywyrazowe ciągi o różnych wyrazach ze zbioru Z: . . Zdarzenie A oznacza: utworzono liczbę podzielną przez 3, zdarzenie B – iloczyn początkowych dwóch cyfr jest równy 8. Należy obliczyć .

, każdy trzeci wyraz można wybrać na 7 sposobów, zatem .

Ponieważ suma pierwszych dwóch cyfr jest w każdym przypadku podzielna przez 3, to , zatem wobec tego.

Zad. 11.

Korzystając z wzorów:

1.

2.

otrzymamy:

.

Korzystając z wzoru:

otrzymamy:

, to

, to

.

Zad. 12.

Aby wyznaczyć równanie okręgu stycznego do dwóch przecinających się prostych należy wyznaczyć współrzędne środka okręgu S(a,b), którego odległość od każdej prostej jest równa 8. Korzystając z odległości punktu od prostej otrzymamy:

Po przekształceniach otrzymamy lub i , wobec tego:

Istnieją cztery okręgi styczne do tych prostych o promieniu r=8, które określają się wzorami:

Zad. 13.

Wyrazy ciągu geometrycznego są pierwiastkami wielomianu , to . Korzystając z wzoru Viete’a dla równania trzeciego stopnia, mamy: , zatem:

, to

. Liczba -2 jest pierwiastkiem wielomianu , zatem .

, rozkładając wielomian na czynniki pierwsze otrzymamy: , wobec tego pozostałymi pierwiastkami wielomianu są liczby: 1,4, zatem lub

1. Istnieją dwa takie ciągi: i .

Zad. 14.

Należy wyznaczyć współrzędne wierzchołka paraboli

.   
Nierówność koła: .

Wierzchołek paraboli W należy do koła, więc ,   
po przekształceniu otrzymamy .

Liczba jest pierwiastkiem wielomianu dzieli wyraz wolny wielomianu   
i dzieli współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej. Szukamy dzielników liczby 8   
i sprawdzamy, które z nich są pierwiastkami wielomianu. Liczby 1, 2, 4 są pierwiastkami wielomianu , zatem:

, rozwiązując nierówność, otrzymamy, że

A

B

C

D

S

G

F

E

a

a

a

Zad. 15.

ΔABS jest trójkątem prostokątnym równoramiennym,   
. Skoro ΔACS jest trójkątem prostokątnym,   
to z twierdzenia Pitagorasa wynika:

, to

.

Zauważmy, że przekrój AEFG jest deltoidem. Należy wyznaczyć długości przekątnych tego deltoidu AF, EG. Z faktu, że płaszczyzna przekroju jest prostopadła do krawędzi CS wynika, że AF jest wysokością trójkąta prostokątnego ACS poprowadzoną na przeciwprostokątną.

Korzystając ze wzoru na pole trójkąta mamy:

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AFS otrzymamy:

Zauważmy, że trójkąty BCS i FES SA prostokątne oraz ΔBCS~ΔFES na podstawie cechy kkk. Prawdziwa jest równość:

Zauważmy także, że ΔEGS~ΔBDS w skali , zatem . Można już obliczyć pole przekroju AEFG.

Zad. 16.

P

Q

A

B

C

S

a

a

D

h

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.

Zauważmy, że , .

Z twierdzenia Pitagorasa w ΔPCS mamy:

Z twierdzenia Pitagorasa w ΔDBS mamy:

Ustalamy dziedzinę:

Zatem pole ΔABC w zależności od wysokości h określa się wzorem:

Ponieważ funkcja jest rosnąca wystarczy zbadać funkcję:

.

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcji jest zerowanie się pierwszej pochodnej, zatem:

, to

.

Zbadajmy znak pochodnej i wyznaczmy ekstremum funkcji:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | (0,2) | 2 | (2,) |
|  | + | 0 | – |
|  |  | max lokalne  h=2 |  |

Dla h=2 funkcja f przyjmuje wartość największą, więc pole przyjmuje wartość największą dla h=2,

zatem .

Opracowała Maria Romanowska

Konsultant MODN