Miejski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli

**Próbny egzamin maturalny (odpowiedzi do arkusza nr. 5)**

maj 2020

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| NR ZADANIA | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ODPOWIEDŹ | C | C | C | B | A |

Zad. 6.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 8 | 7 | 4 |

Zad. 7.

Należy wykazać, że dla każdej liczby całkowitej x wielomian jest iloczynem pięciu kolejnych liczb całkowitych. $120=5\*3\*8$, liczby 5, 3, 8 są względnie pierwsze.
Iloczyn tych liczb jest liczbą podzielną przez 5, 3, 8.

$$W\left(x\right)=x^{5}-5x^{3}+4x=x\left(x^{4}-5x^{2}+4\right)=x\left(x^{4}-x^{2}-4x^{2}+4\right)=$$

$$=x\left[x^{2}\left(x^{2}-1\right)-4\left(x^{2}-1\right)\right]=x\left(x^{2}-1\right)\left(x^{2}-4\right)=$$

$$=x\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x+2\right)=\left(x-2\right)\left(x-1\right)x\left(x+1\right)\left(x+2\right).$$

Iloczyn pięciu kolejnych liczb całkowitych jest liczbą podzielną przez 120. W iloczynie pięciu kolejnych liczby całkowitych są dwie kolejne liczby parzyste, co najmniej jedna liczba podzielna przez 3, a także jedna liczba podzielna przez 5. Iloczyn dwóch kolejnych liczb parzystych jest podzielny przez 8. Zatem wartość wielomianu jest liczbą podzielną przez 5, 3 i 8, więc jest podzielna przez 120.

Zad. 8.

Z: α, β – kąty wewnętrzne trójkąta;

 a, b, c – odcinki leżące naprzeciwko odpowiednich kątów.

A

C

B

c

b

a

α

β

T: $\frac{tgβ}{tgα}=\frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{a^{2}+c^{2}-b^{2}}$.

D: $\frac{tgβ}{tgα}=\frac{\frac{sinβ}{cosβ}}{\frac{sinα}{cosα}}=\frac{sinβ\*cosα}{sinα\*cosβ}$

Z twierdzenia cosinusów w ΔABC wynika:

$a^{2}=b^{2}+c^{2}-2bc\*cosα$, to:

$cosα=\frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{2bc}$ oraz

$b^{2}=a^{2}+c^{2}-2ac\*cosβ$, to

$$cosα=\frac{a^{2}+c^{2}-b^{2}}{2ac}.$$

Z twierdzenia sinusów w ΔABC wynika:

$$\frac{a}{sinα}=2R => sinα=\frac{a}{2R},$$

$$\frac{b}{sinβ}=2R => sinβ=\frac{b}{2R}.$$

Wobec tego:

$$\frac{sinβ\*cosα}{sinα\*cosβ}=\frac{\frac{b}{2R}\*\frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{2bc}}{\frac{a}{2R}\*\frac{a^{2}+c^{2}-b^{2}}{2ac}}=\frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{a^{2}+c^{2}-b^{2}} .$$

cnd.

Zad. 9.

Z: D jest środkiem odcina AB, F – środkiem odcinka CD.

D

C

B

A

H

G

E

F

 Poprowadzimy prostą BG równoległą do prostej CD.

T: |BE|=2|CE|

D: z twierdzenia Talesa wynika, że:

$$\frac{|AF|}{|DF|}=\frac{|AH|}{|BH|} => \left|AF\right|=\frac{\left|AH\right|\*|DF|}{|BH|}$$

$$\frac{|AF|}{|FC|}=\frac{|AH|}{|GH|} => \left|AF\right|=\frac{\left|AH\right|\*|FC|}{|GH|} .$$

Z założenia |DF|=|FC|

$$\frac{\left|AH\right|\*|DF|}{|BH|}=\frac{\left|AH\right|\*|FC|}{|GH|} => \frac{\left|AH\right|\*|FC|}{|BH|}=\frac{\left|AH\right|\*|FC|}{|GH|} => \left|BH\right|=|GH|$$

i punkty B, H, G są współliniowe, to H jest środkiem odcinka BG.

Zatem $\frac{|CE|}{|BE|}=\frac{x}{2x}$ => |BE|=2|CE|

cnd.

Zad. 10.

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie trzywyrazowe ciągi o różnych wyrazach ze zbioru Z: $\left\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\right\}$. $\left|Ω\right|=9\*8\*7$. Zdarzenie A oznacza: utworzono liczbę podzielną przez 3, zdarzenie B – iloczyn początkowych dwóch cyfr jest równy 8. Należy obliczyć $P\left(B\right)=\frac{P(A∩B)}{P(B)}=\frac{|A∩B|}{|B|}$ .

$B=\{\left(1,8,a\right), \left(8,1,b\right), \left(2,4,c\right),(4,2,d)$, każdy trzeci wyraz można wybrać na 7 sposobów, zatem $\left|B\right|=4\*7=28$.

Ponieważ suma pierwszych dwóch cyfr jest w każdym przypadku podzielna przez 3, to $a, b, c, d\in \{3,6,9\}$, zatem $\left|A∩B\right|=4\*3=12, $wobec tego$ P\left(B\right)=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$.

Zad. 11.

Korzystając z wzorów:

1. $cosα\*cosβ=\frac{1}{2}\left(\cos(\left(α+β\right))+\cos(\left(α-β\right))\right)$

2. $sinα\*sinβ=-\frac{1}{2}\left(\cos(\left(α+β\right))-\cos(\left(α-β\right))\right),$

otrzymamy:

$$\frac{1}{2}\left(\cos(\left(7x+3x\right))+\cos(\left(7x-3x\right))\right)-\frac{1}{2}\left(\cos(\left(2x+8x\right))-\cos(\left(2x-8x\right))\right)=0$$

$$\cos(\left(10x\right))+\cos(\left(4x\right))-\cos(\left(10x\right))+\cos(\left(6x\right))=0$$

$\cos(\left(4x\right))+\cos(\left(6x\right))=0$.

Korzystając z wzoru:

$$cosα+cosβ=2cos\left(\frac{α+β}{2}\right)\*\cos(\left(\frac{α-β}{2}\right))$$

otrzymamy:

$$2cos5x\*cosx=0$$

$cos5x=0 ⋁ cosx=0$, to

$$5x=\frac{π}{2}+kπ ⋁ cosx=\frac{π}{2}+kπ; k\in C$$

$\left(x=\frac{π}{10}+\frac{kπ}{5} ⋁ cosx=\frac{π}{2}+kπ\right) ∧ x\in \left〈0,\frac{π}{2}\right〉$, to

$x\in \left\{\frac{π}{10}, \frac{3π}{10}, \frac{π}{2}\right\}$.

Zad. 12.

Aby wyznaczyć równanie okręgu stycznego do dwóch przecinających się prostych należy wyznaczyć współrzędne środka okręgu S(a,b), którego odległość od każdej prostej jest równa 8. Korzystając z odległości punktu od prostej otrzymamy:

$$\frac{|3a-4b+10|}{\sqrt{9+16}}=8 ∧ \frac{|3a+4b|}{\sqrt{9+16}}=8$$

$$\left|3a-4b+10\right|=40 ∧ \left|3a+4b\right|=40$$

$$\left|3a-4b+10\right|=\left|3a+4b\right|$$

$$3a-4b+10=3a+4b ⋁ 3a-4b+10=-3a-4b $$

Po przekształceniach otrzymamy $b=\frac{5}{4}$ lub$ a=-\frac{5}{3}$ i $\left|3a+4b\right|=40$, wobec tego:

$b=\frac{5}{4} b=\frac{5}{4} a=-\frac{5}{3} a=-\frac{5}{3}$

$$∨$$

$$∨$$

$$∨$$

$$a=\frac{35}{3} a=15 b=-\frac{35}{4} b=\frac{45}{4}$$

Istnieją cztery okręgi styczne do tych prostych o promieniu r=8, które określają się wzorami:

$$\left(x-\frac{35}{3}\right)^{2}+\left(y-\frac{5}{4}\right)^{2}=64 ∨ \left(x+\frac{5}{3}\right)^{2}+\left(y-\frac{45}{4}\right)^{2}=64 ∨$$

$$\left(x-15\right)^{2}+\left(y-\frac{5}{4}\right)^{2}=64 ∨\left(x+\frac{5}{3}\right)^{2}+\left(y+\frac{35}{4}\right)^{2}=64.$$

Zad. 13.

Wyrazy ciągu geometrycznego $(a\_{1},a\_{2},a\_{3})$ są pierwiastkami wielomianu $W\left(x\right)=x^{3}+bx^{2}-6x+8$, to $a\_{1}=x\_{1},a\_{2}=x\_{2},a\_{3}=x\_{3}$. Korzystając z wzoru Viete’a dla równania trzeciego stopnia, mamy: $x\_{1}\*x\_{2}\*x\_{3}=-8$, zatem:

$a\_{1}\*a\_{1}q\*a\_{1}q^{2}=-8 => \left(a\_{1}q\right)^{3}=-8 => a\_{1}q=-2$, to

$x\_{2}=a\_{2}=-2$. Liczba -2 jest pierwiastkiem wielomianu $W\left(x\right)$, zatem $W\left(-2\right)=0$.

$$W\left(-2\right)=-8+4b+12+8=4b+12 =>4b+12=0 => b=-3$$

$W\left(x\right)=x^{3}-3x^{2}-6x+8$, rozkładając wielomian na czynniki pierwsze otrzymamy: $W\left(x\right)=\left(x+2\right)\left(x-1\right)\left(x-4\right)$, wobec tego pozostałymi pierwiastkami wielomianu $W\left(x\right)$ są liczby: 1,4, zatem $a\_{1}=1,a\_{2}=-2,a\_{3}=4$ lub $a\_{1}=4,a\_{2}=-2,a\_{3}=1$

1. $b=-3$
2. Istnieją dwa takie ciągi: $\left(1,-2,4\right)$ i $\left(4,-2,1\right)$.

Zad. 14.

$y=x^{2}-2kx+2k^{2}-4k+4$

Należy wyznaczyć współrzędne wierzchołka paraboli $\left(p=-\frac{b}{2a}, q=f\left(p\right)\right), p=k, $

$q=k^{2}-4k+4, W\left(k, k^{2}-4k+4\right)$.
Nierówność koła: $\left(x-3\right)^{2}+\left(y-2\right)^{2}\leq 5$ .

Wierzchołek paraboli W należy do koła, więc $\left(k-3\right)^{2}+\left(k^{2}-4k+2\right)^{2}\leq 5$,
po przekształceniu otrzymamy $k^{4}-8k^{3}+21k^{2}-22k+8\leq 0$.

Liczba $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W\left(k\right) => p$ dzieli wyraz wolny wielomianu
i $q$ dzieli współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej. Szukamy dzielników liczby 8
i sprawdzamy, które z nich są pierwiastkami wielomianu. Liczby 1, 2, 4 są pierwiastkami wielomianu $W\left(k\right)$, zatem:

$\left(k-1\right)^{2}\left(k-2\right)\left(k-4\right)\leq 0$, rozwiązując nierówność, otrzymamy, że

$$k\in \{1\}∪\left〈2,4\right〉$$

A

B

C

D

S

G

F

E

a

a

a

Zad. 15.

ΔABS jest trójkątem prostokątnym równoramiennym,
$\left|SB\right|=a\sqrt{2}$. Skoro ΔACS jest trójkątem prostokątnym,
to z twierdzenia Pitagorasa wynika:

$\left|SC\right|^{2}=\left|AC\right|^{2}+\left|AS\right|^{2}$, to

$\left|SC\right|^{2}=\left(a\sqrt{2}\right)^{2}+a^{2}=>\left|SC\right|=a\sqrt{3}$.

Zauważmy, że przekrój AEFG jest deltoidem. Należy wyznaczyć długości przekątnych tego deltoidu AF, EG. Z faktu, że płaszczyzna przekroju jest prostopadła do krawędzi CS wynika, że AF jest wysokością trójkąta prostokątnego ACS poprowadzoną na przeciwprostokątną.

Korzystając ze wzoru na pole trójkąta mamy:

$$\frac{\left|AC\right|\*|AS|}{2}=\frac{\left|SC\right|\*|AF|}{2} => a^{2}\sqrt{2}=a\sqrt{3}\*\left|AF\right|=> \left|AF\right|=\frac{a\sqrt{6}}{3} .$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AFS otrzymamy:

$$\left|SF\right|^{2}=\left|AS\right|^{2}-\left|AF\right|^{2}=a^{2}-\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^{2}=\frac{3a^{2}}{9} => \left|SF\right|=\frac{a\sqrt{3}}{3} .$$

Zauważmy, że trójkąty BCS i FES SA prostokątne oraz ΔBCS~ΔFES na podstawie cechy kkk. Prawdziwa jest równość:

$$\frac{|SE|}{|SC|}=\frac{|SF|}{|SB|} => \left|SE\right|=\frac{\left|SC\right|\*|SF|}{|SB|}=\frac{a\sqrt{3}\*\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2} .$$

Zauważmy także, że ΔEGS~ΔBDS w skali $k=\frac{|SE|}{|SB|}=\frac{1}{2}$, zatem $\left|EG\right|=\frac{1}{2}\left|BD\right|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Można już obliczyć pole przekroju AEFG.

$$P\_{AEFG}=\frac{1}{2}\left|AF\right|\*\left|EG\right|=\frac{1}{2}\*\frac{a\sqrt{6}}{3}\*\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a^{2}\sqrt{3}}{6} .$$

Zad. 16.

P

Q

A

B

C

S

a

a

D

h

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.

Zauważmy, że $\left|SP\right|=\left|SQ\right|=4\sqrt{3}$, $\left|PC\right|=\frac{1}{2}\left|PQ\right|=4\sqrt{2}$ .

Z twierdzenia Pitagorasa w ΔPCS mamy:

$$\left|SC\right|^{2}=\left|SP\right|^{2}-\left|PC\right|^{2}=\left(4\sqrt{3}\right)^{2}-\left(4\sqrt{2}\right)^{2}=16=>\left|SC\right|=4.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w ΔDBS mamy:

$$\left|SB\right|^{2}=\left|SD\right|^{2}+\left|DB\right|^{2}=>\left(4\sqrt{3}\right)^{2}=\left(h+4\right)^{2}+a^{2}=>$$

$$a^{2}=32-8h-h^{2}=>a=\sqrt{-h^{2}-8h+32} .$$

Ustalamy dziedzinę:

$$32-8h-h^{2}>0∧h>0=>h\in \left(0, 4\sqrt{3}-4\right).$$

Zatem pole ΔABC w zależności od wysokości h określa się wzorem:

$$P\left(h\right)=\sqrt{-h^{4}-8h^{3}+32h^{2}}.$$

Ponieważ funkcja $y=\sqrt{x}$ jest rosnąca wystarczy zbadać funkcję:

$f\left(h\right)=-h^{4}-8h^{3}+32h^{2}$.

$$f^{'}\left(h\right)=-4h^{3}-24h^{2}+64h∧ h\in \left(0, 4\sqrt{3}-4\right).$$

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcji jest zerowanie się pierwszej pochodnej, zatem:

$f^{'}\left(h\right)=0=>-4h(h^{2}+6h-16)=0=> -4h\left(h-2\right)\left(h+8\right)=0$, to

$h\in \{-8,0,2\}∧h\in \left(0, 4\sqrt{3}-4\right)$.

Zbadajmy znak pochodnej i wyznaczmy ekstremum funkcji:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$h$$ | (0,2) | 2 | (2,$ 4\sqrt{3}-4$) |
| $$f^{'}\left(h\right)$$ | + | 0 | – |
| $$f\left(h\right)$$ |  | max lokalneh=2 |  |

Dla h=2 funkcja f przyjmuje wartość największą, więc pole $P\_{AEFG}\left(h\right)$ przyjmuje wartość największą dla h=2,

$a=\sqrt{-h^{2}-8h+32}=2\sqrt{3},$ zatem $\left|AB\right|=4\sqrt{3}, \left|AC\right|=\left|BC\right|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^{2}+2^{2}}=4$.

Opracowała Maria Romanowska

Konsultant MODN