PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY

POZIOM PODSTAWOWY – KWIECIEŃ 2021

CZAS PRACY: **170 MINUT**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **45**

Życzymy powodzenia!

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Dane są liczby $a = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ i $b = \frac{1-\sqrt{2}}{4}$, wówczas iloraz $\frac{b}{a}$ jest równy:

A. $-\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ **B.** $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$ **C.** $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ **D.** $3 + 2\sqrt{2}$

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $0{,}25 \cdot 2^3 \cdot \frac{\sqrt{32}\cdot\sqrt{75}}{\sqrt{6}}$ jest równa:

A. $8\sqrt{6}$ **B.** $20\sqrt{6}$ **C.** 20 **D.** 40

Zadanie 3. (0–1)

Liczba $\log_3[(\sqrt{3})^3 \cdot (\sqrt{3})^5 \cdot (\sqrt{3})^{10}]$ jest równa:

A. $(\sqrt{3})^{15}$ **B.** $(\sqrt{3})^{20}$ **C.** 9 **D.** 18

Zadanie 4. (0–1)

Pensja Pana Adama jest o 20% niższa od średniej krajowej, a pensja pana Bartka jest o 60% wyższa od średniej krajowej. Pensja Pana Bartka jest wyższa od pensji Pana Adama o:

A. 80% **B.** 100% **C.** 120% **D.** 200%

Zadanie 5. (0–1)

Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{(2+\sqrt{11})(\sqrt{11}-2)x}{7} \leq 3x - \frac{4}{3}$ jest przedział:

A. $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right\rangle$ **B.** $\left(-\frac{2}{3}; \infty\right)$ **C.** $\left\langle -\frac{2}{3}; \infty\right)$ **D.** $\left\langle \frac{2}{3}; \infty\right)$

Zadanie 6. (0–1)

Iloczyn wszystkich rozwiązań równania $(x^2-8)(x-4)^2(x^2-x-2)=0$ jest równy:

A. 16 **B.** -16 **C.** -64 **D.** 64

Zadanie 7. (0–1)

Funkcja liniowa $f(x) = -2(m^2-3)x + 4$ jest malejąca dla:

A. $m \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$

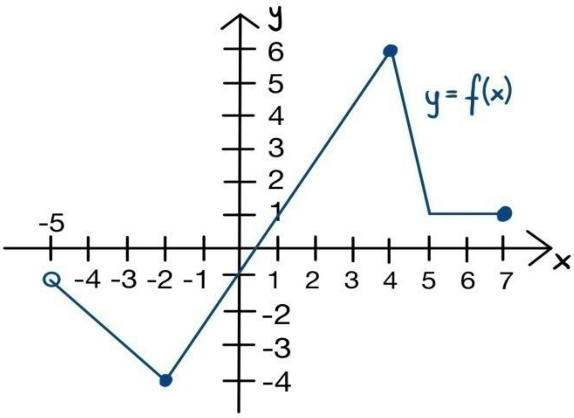
B. $m \in (-3; 3)$

C. $m \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$

D. $m \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$.

Zadanie 8. (0–1)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$. Wskaż zdanie fałszywe.



A. Dziedziną funkcji f jest przedział $(-5; 7\rangle$.

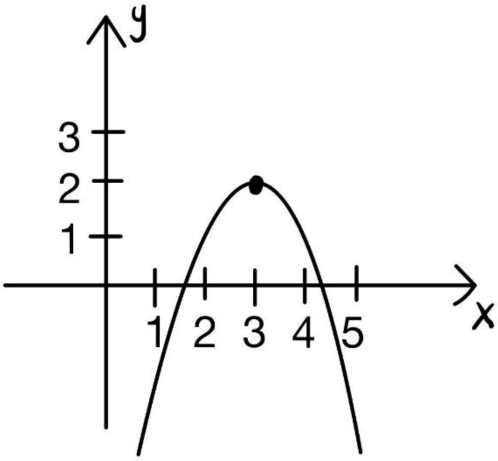
B. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -4; 6\rangle$.

C. Funkcja f jest malejąca dla $x \in (-5; -2\rangle \cup \langle 4; 5\rangle$.

D. Funkcja f ma jedno miejsce zerowe.

Zadanie 9. (0–1)

Na rysunku przedstawiono fragment paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $y = f(x)$. Funkcja kwadratowa określona jest wzorem:



A. $f(x) = -(x+3)^2 + 2$

B. $f(x) = -(x+3)^2 - 2$

C. $f(x) = -(x+3)^2 - 2$

D. $f(x) = -(x-3)^2 + 2$

Zadanie 10. (0–1)

Do wykresu funkcji kwadratowej $y = f(x)$ należy punkt $P = (4; -14)$. Osią symetrii wykresu funkcji jest prosta o równaniu $x = 6$, a jednym z miejsc zerowych funkcji f jest liczba 1. Funkcja kwadratowa $y = f(x)$ określona jest wzorem:

A. $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)(x-11)$ **B.** $f(x) = \frac{2}{3}(x+1)(x+11)$

C. $f(x) = \frac{2}{3}(x+1)(x-11)$ **D.** $f(x) = \frac{1}{3}(x-1)(x-11)$

Zadanie 11. (0–1)

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{\sqrt{2}x - \sqrt{8}}{4x^2 + 4}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wartość funkcji f dla argumentu 2 jest równa:

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 8

Zadanie 12. (0–1)

Proste o równaniach $k\colon y = (2(m-5)+3)x - 2$ i $l\colon y = -2x - 4$ są równoległe gdy:

A. $m = -\frac{5}{2}$ **B.** $m = \frac{5}{2}$ **C.** $m = -\frac{9}{2}$ **D.** $m = \frac{9}{2}$

Zadanie 13. (0–1)

Prosta k prostopadła do prostej $l\colon y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 4$ i przechodząca przez punkt $P = (3\sqrt{2}; -2)$ określona jest wzorem:

A. $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 4$ **B.** $y = -\sqrt{2}x + 4$ **C.** $y = -\sqrt{2}x - 4$ **D.** $y = \sqrt{2}x - 4$

Zadanie 14. (0–1)

Punkty $A = (60; 20)$ i $B = (20; 60)$ są symetryczne względem prostej k. Prosta k ma równanie:

A. $x = 40$ **B.** $y = 40$ **C.** $y = x$ **D.** $y = -x$

Zadanie 15. (0–1)

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie dane są punkty $A = (-24; 8)$ i $B = (12; -10)$. Punkty A' i B' są obrazami tych punktów w symetrii środkowej względem punktu $O = (0; 0)$, wówczas środek odcinka $A'B'$ ma współrzędne:

A. $S' = (-6; -1)$ **B.** $S' = (6; -1)$ **C.** $S' = (6; 1)$ **D.** $S' = (-6; 1)$

Zadanie 16. (0–1)

W kwadracie $ABCD$ punkty $K = (0; -6)$ i $L = (12; 10)$ są środkami boków AD i CD. Pole kwadratu $ABCD$ jest równe:

A. 400 **B.** 800 **C.** 1600 **D.** 2000

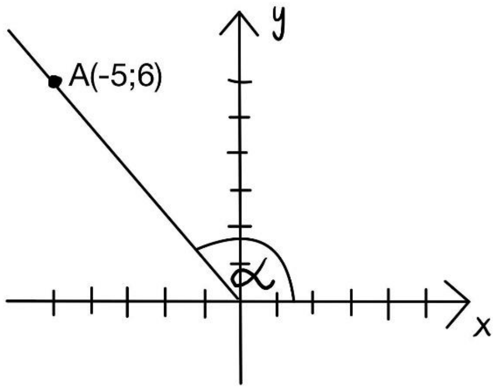
Zadanie 17. (0–1)

Sinus kąta ostrego α jest równy $\frac{1}{4}$. Wartość wyrażenia $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$ jest równa:

A. 1 **B.** 0 **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $-\frac{7}{8}$

Zadanie 18. (0–1)

Tangens kąta α zaznaczonego na rysunku jest równy:



A. $-\frac{5}{6}$

B. $-\frac{6}{5}$

C. $\frac{5}{6}$

D. -1

Zadanie 19. (0–1)

Liczby $x-4$, $x+2$, $3x-4$ są trzema kolejnymi początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Osiemdziesiąty pierwszy wyraz tego ciągu jest równy:

A. 482 **B.** 364 **C.** 326 **D.** 480

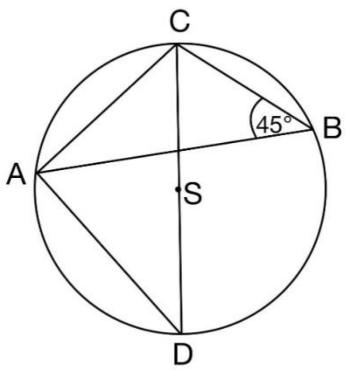
Zadanie 20. (0–1)

Liczby $\sqrt{17}-1, 2x, \sqrt{17}+1$ są początkowymi kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego rosnącego. Zatem suma wyrazów tego ciągu jest równa:

A. $2-2\sqrt{17}$ **B.** $2+2\sqrt{17}$ **C.** $4+2\sqrt{17}$ **D.** $4-2\sqrt{17}$

Zadanie 21. (0–1)

Na rysunku obok trójkąty ABC i ADC są wpisane w okrąg o środku w punkcie S. Odcinek $|CD|$ jest średnicą okręgu. Jeżeli $|AC| = 4$ oraz kąt $ABC = 45°$, to średnica tego okręgu ma długość:

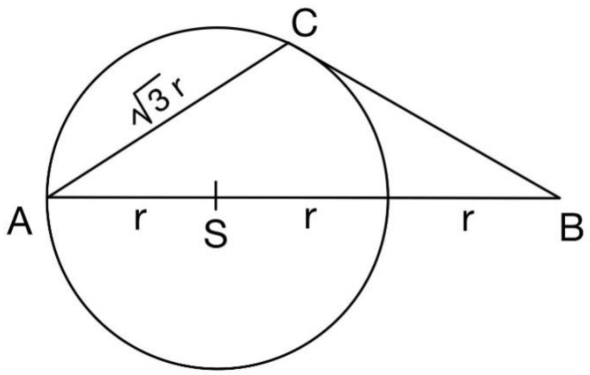


A. 4 **B.** 8

C. $4\sqrt{2}$ **D.** $8\sqrt{2}$

Zadanie 22. (0–1)

Wierzchołki A, C trójkąta ABC należą do okręgu o środku w punkcie S i promieniu długości r. Długości boków $|AB|$ i $|AC|$ są odpowiednio równe $|AB| = 3r$, $|AC| = \sqrt{3}r$ (rysunek obok).



Miary kątów trójkąta ABC są równe:

A. $30°,\ 30°,\ 120°$

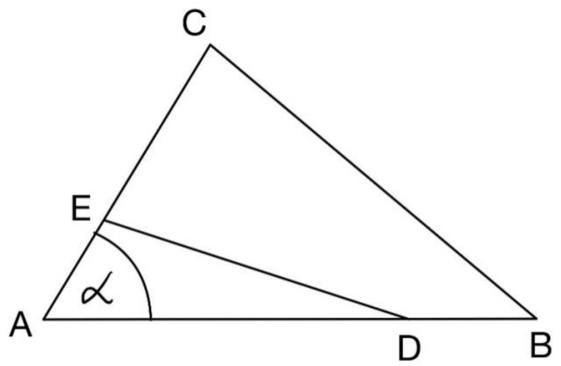
B. $45°,\ 45°,\ 90°$

C. $30°,\ 60°,\ 90°$

D. $30°,\ 45°,\ 105°$

Zadanie 23. (0–1)

Dany jest trójkąt ABC. Na boku AB wybrano punkt D, tak, że $|DB| = \frac{1}{4}|AB|$, a na boku AC taki punkt E, że $|CE| = \frac{2}{3}|AC|$ oraz $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ (rysunek obok). Pole trójkąta ABC jest równe 40, zatem pole trójkąta ADE jest równe:



A. 4 **B.** 8

C. 10 **D.** 20

Zadanie 24. (0–1)

Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny jest równy 5 cm, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 10,5 cm. Suma długości przyprostokątnych tego trójkąta wynosi:

A. 31 cm **B.** 26 cm **C.** 20 cm **D.** 11 cm

Zadanie 25. (0–1)

Wszystkich liczb czterocyfrowych, w których zapisie występuje dokładnie jedna cyfra nieparzysta jest:

A. 2500 **B.** 2125 **C.** 2240 **D.** 2100

Zadanie 26. (0–1)

Rzucamy dwa razy symetryczną czworościenną kostką do gry, która na każdej ściance ma inną liczbę oczek – od jednego do czterech. Prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że suma wyrzuconych oczek jest większa od pięciu jest równa:

A. $\frac{3}{8}$ **B.** $\frac{5}{8}$ **C.** $\frac{4}{16}$ **D.** $\frac{5}{16}$

Zadanie 27. (0–1)

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Suma długości wszystkich krawędzi jest równa 36. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe:

A. $9\sqrt{3}+54$ **B.** $4\sqrt{3}+54$ **C.** $4{,}5\sqrt{3}+54$ **D.** $8\sqrt{3}+54$

Zadanie 28. (0–1)

Miesięczne wynagrodzenie pracowników pewnej firmy przedstawiono w tabeli.

Wynagrodzenie miesięczne	1100	2200	2600	3000	3200	4500	6000	7500
Liczba pracowników	3	2	2	2	3	3	2	1

Mediana miesięcznego wynagrodzenia w tej firmie jest równa:

A. 3000 **B.** 3100 **C.** 3200 **D.** 3400

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 29. (0–2)

Rozwiąż nierówność:

$$2x(x-2)+3x>3(x-1)+1$$

Zadanie 30. (0–2)

Rozwiąż równanie:

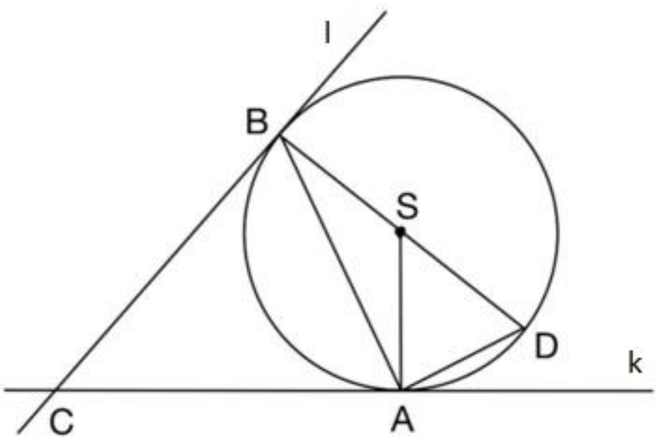
$$\frac{(5x-2)(x-4)}{(2x-8)(x+3)}=0$$

Zadanie 31. (0–2)

Wykaż, że jeśli liczby naturalne k i k+2 przy dzieleniu przez 5 dają resztę 1 i 3, to suma kwadratów tych liczb jest podzielna przez 10.

Zadanie 32. (0–2)

Trzy różne punkty A, B, D należą do okręgu o środku w punkcie S tak, że odcinek BD jest średnicą tego okręgu. Styczne k i l do tego okręgu, odpowiednio w punktach A i B przecinają się w punkcie C (rysunek obok). Wykaż, że trójkąty ACB i ASD są podobne.



Zadanie 33. (0–2)

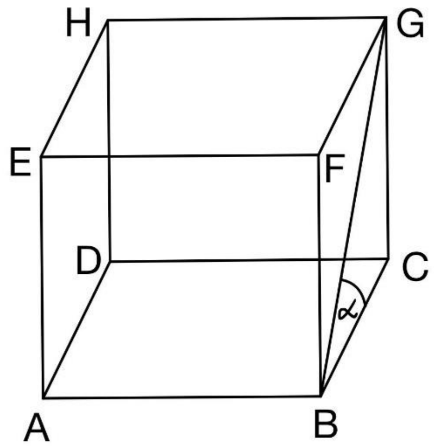
Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = 7$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{5\sin\alpha - 9\cos\alpha}{-6\sin\alpha + 7\cos\alpha}$.

Zadanie 34. (0–3)

W rosnącym ciągu arytmetycznym (a_n) określonym dla $n \geq 1$, suma trzech jego początkowych wyrazów jest równa 30, a ich iloczyn 840. Wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu (a_n).

Zadanie 35. (0–4)

W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ dane są:



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{2}$,

$|BG| = 3\sqrt{29}$,

$|BH| = 5\sqrt{13}$,

gdzie:

$|BH|$ jest przekątną prostopadłościanu,

odcinek $|BG|$ jest przekątną ściany bocznej $BCGF$,

α – miara kąta CBG.

Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość prostopadłościanu $ABCDEFGH$.

ODPOWIEDZI. PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Odpowiedzi	**A**	**D**	**C**	**B**	**D**	**D**	**D**	**C**	**D**	**A**	**A**	**B**	**B**	**C**
Nr zadania	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Odpowiedzi	**C**	**B**	**D**	**B**	**A**	**C**	**C**	**A**	**C**	**A**	**B**	**A**	**C**	**B**

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 29. (0–2)

Poprawne obliczenie miejsca zerowego	x = 1	1
Podanie zbioru rozwiązań nierówności	$x \in R \setminus \{1\}$	1

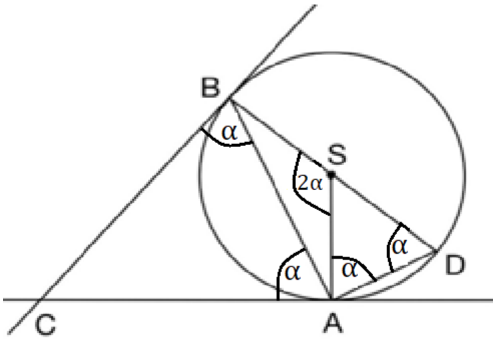
Zadanie 30. (0–2)

Określenie dziedziny równania i skrócenie wyrażenia przez (x-4)	$x \neq 4 \wedge x \neq -3$	1
Rozwiązanie równania	$x = \frac{2}{5}$	1

Zadanie 31. (0–2)

Określenie założenia: $k = 5n + 1,\ k + 2 = 5n + 3$ i tezy $k^2 + (k+2)^2 = 10s,\ n, s \in N$	1
Przekształcenie wyrażenia do postaci $k^2 + (k+2)^2 = 10s$	1

Zadanie 32. (0–2)



Zauważenie, że $|\sphericalangle SAD| = |\sphericalangle ADS| = \alpha$ i $|\sphericalangle ASB| = 2\alpha$	1
Wyznaczenie $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBA| = \alpha$ oraz podanie cechy podobieństwa trójkątów (kkk)	1

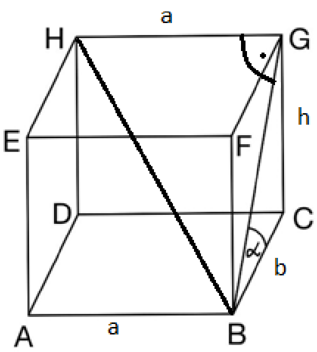
Zadanie 33. (0–2)

Wykorzystanie zależności $\operatorname{tg}\alpha = 7$, to $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 7$ i $\sin\alpha = 7cos\alpha$	1
Obliczenie wartości wyrażenia: $-\frac{26}{35}$	1

Zadanie 34. (0–3)

Wyznaczenie drugiego wyrazu ciągu $a_2 = 10$	1
Ułożenie równania $10 \cdot a_1(20 - a_1) = 840$: $a_1 = 6$ lub $a_1 = 14$ – nie spełnia warunków zadania (odrzucenie), bo ciąg jest rosnący	1
Wyznaczenie wzoru na n-ty wyraz ciągu: $a_n = 4n + 2$	1

Zadanie 35. (0–4)



Wprowadzenie oznaczeń i zauważenie, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{b}$, to $h = \frac{5}{2}b$	1
Wyznaczenie długości krawędzi b: $b^2 = (3\sqrt{29})^2 - (\frac{5}{2}b),\ b = 6$ Wyznaczenie długości h: $h = 15$	1
Skorzystanie z twierdzenia Pitagorasa w ΔBGH i obliczenie długości krawędzi a: $a = 8$	1
$a = 8$, $b = 6$, $h = 15$. Obliczenie pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu $P_c = 516$ oraz objętości $V = 720$	1

OPRACOWANIE:

Maria Romanowska – konsultant ds. matematyki

Elżbieta Sarabon-Pałka – doradca metodyczny ds. matematyki

Miejskie Centrum Wspomagania Edukacji w Opolu

ul. Powstańców Śląskich 19, 45-086 Opole

www.mcwe.opole.pl