

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

--	--	--

PESEL

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to
M-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

**PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z
MATEMATYKI
POZIOM ROZSZERZONY**

TERMIN: **Listopad 2023 r.**
CZAS PRACY: **180 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią
- ☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę.

Kod arkusza

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 16 stron (zadania 1–13).
Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisz w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
7. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

Zadanie 1. (0–2)

Oblicz wartość wyrażenia $(\log_5 \sqrt[4]{125})^m$, gdzie $m = \log_{49} 27 \cdot \log_3 7$.

Zapisz obliczenia.

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Zadanie 2. (0–3)

Oblicz ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, w zapisie których nie występuje cyfra zero, pewna cyfra nieparzysta występuje na dwóch różnych pozycjach, a pozostałe cyfry są parzyste i są różne.

Zapisz obliczenia.

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines forming small squares across the entire page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

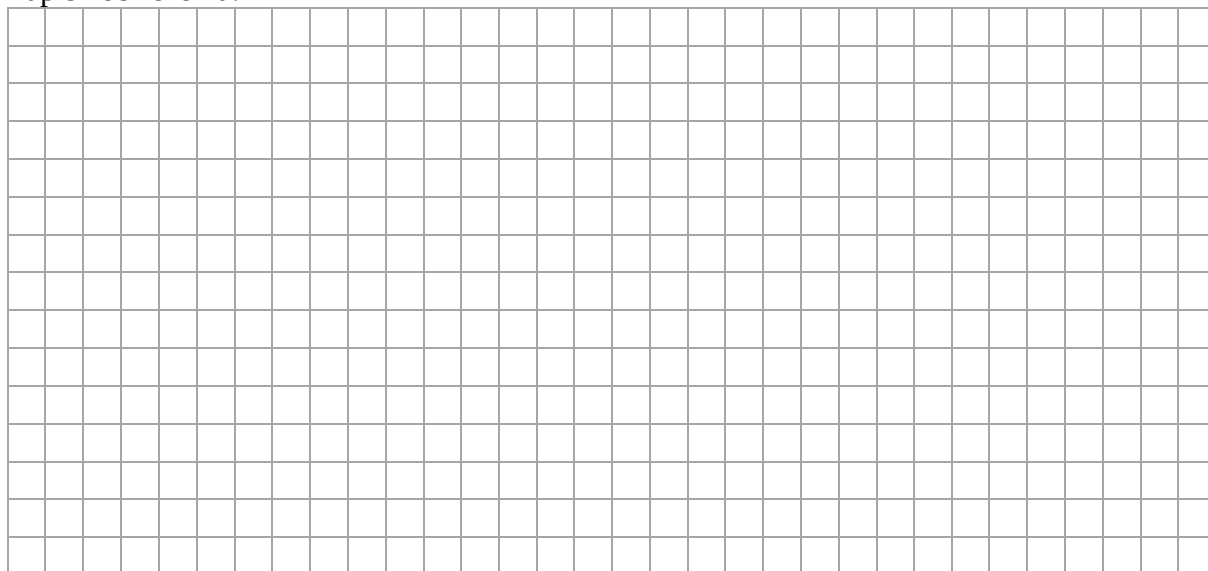
Zadanie 3.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{5x^2 - 1}{x^2 + 3x + 4}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Prosta określona równaniem $y = 2$ przecina wykres funkcji f w dwóch punktach A i B .

Zadanie 3.1 (0–2)

Wyznacz współrzędne punktów A i B .

Zapisz obliczenia.

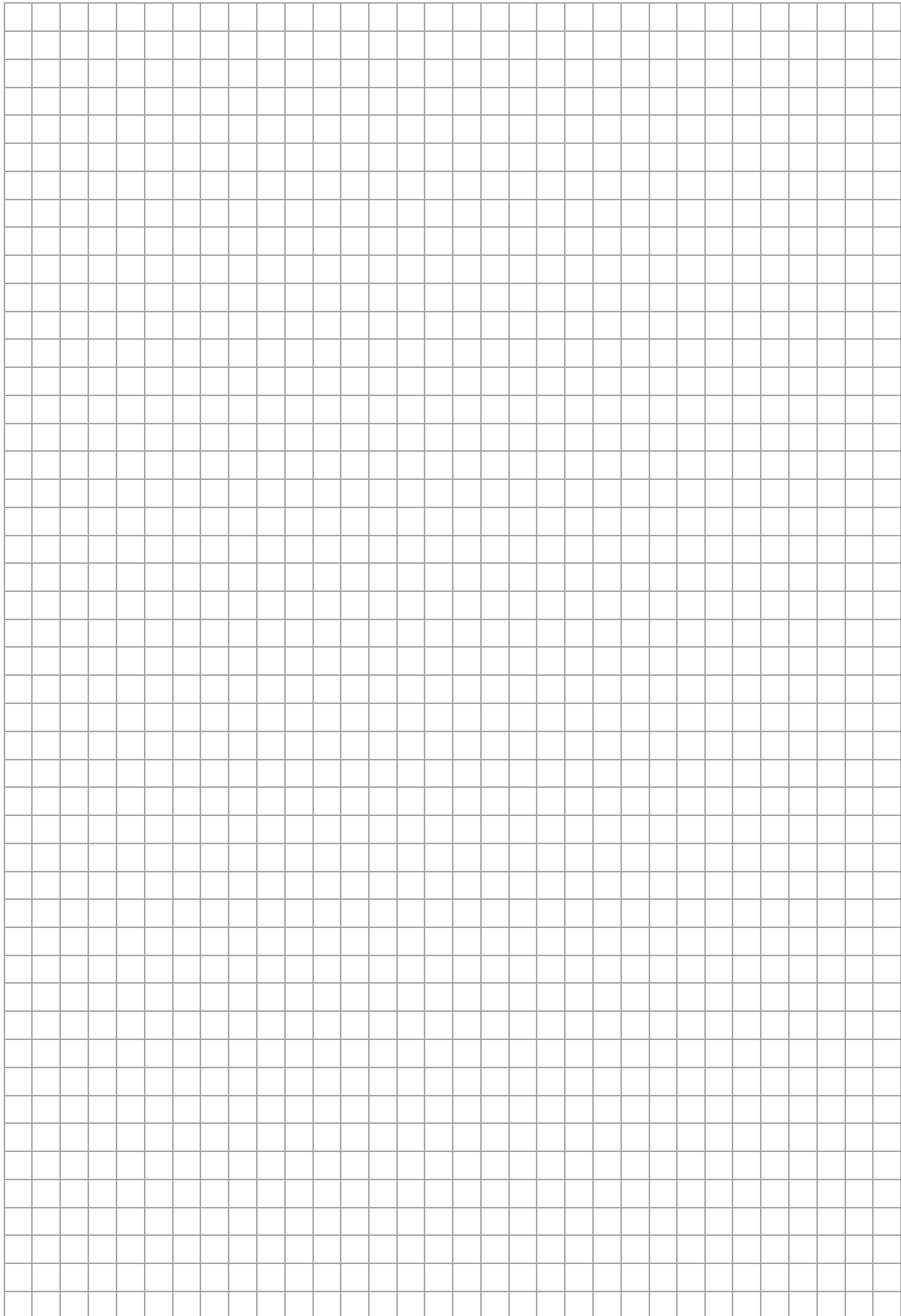
**Zadanie 3.2 (0–2)**

Wykaż, że styczne do wykresu funkcji f poprowadzone w punktach A i B mają wspólne miejsce zerowe.



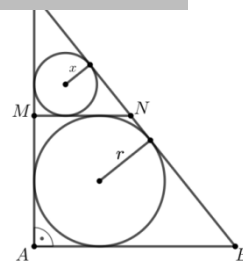
Zadanie 4. (0–3)

Wykaż, że dla każdych liczb rzeczywistych x i y spełniających warunek $x > 3y$, prawdziwa jest nierówność $x^3 - 24y^3 \geq 9xy^2 - 3x^2y + 3y^3$.

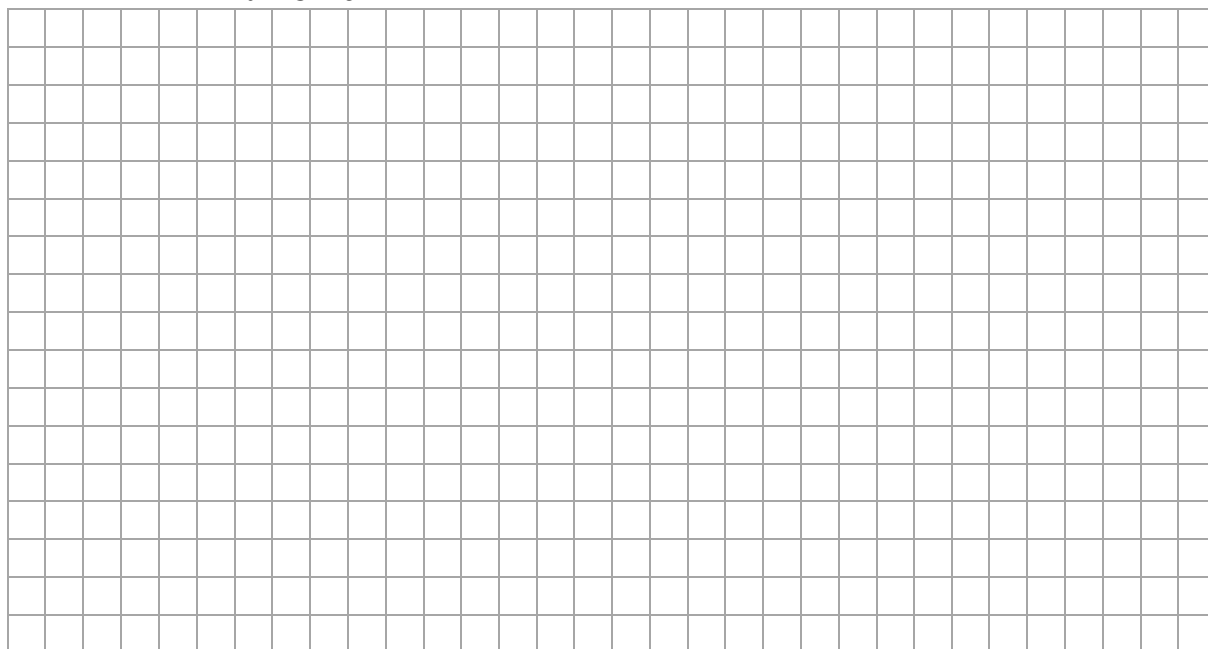


Zadanie 5.

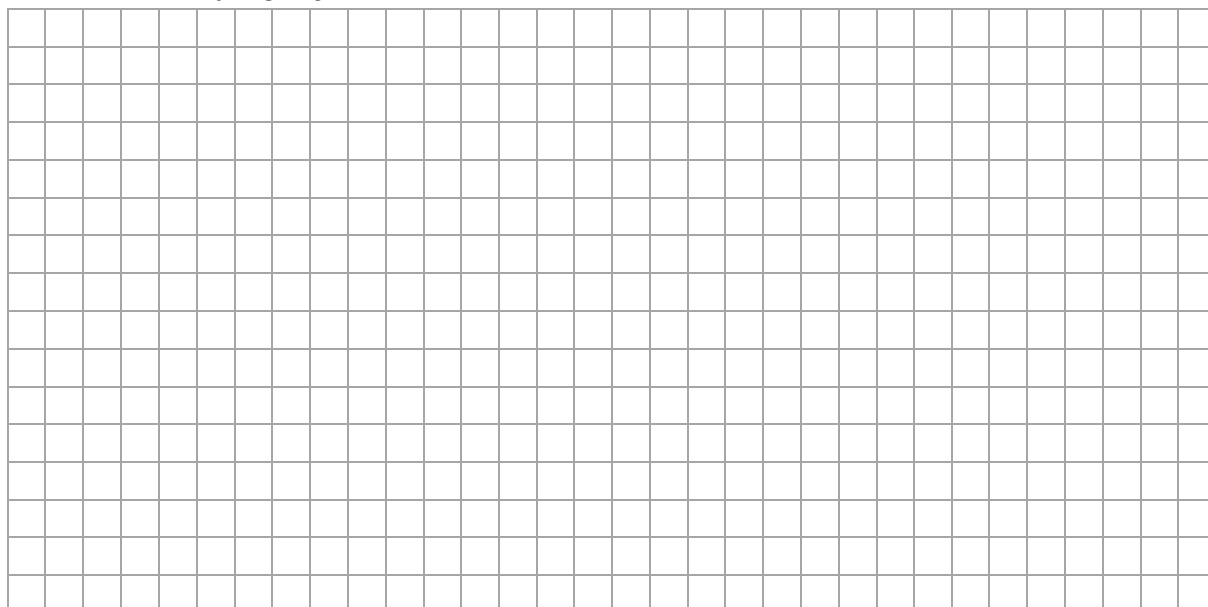
W trójkąt prostokątny ABC o bokach długości $|AB| = a$, $|AC| = b$, i $|BC| = c$, gdzie $a \leq b < c$, wpisano okrąg o promieniu długości r . Następnie poprowadzono styczną do tego okręgu równoległą do boku AB , która przecięła boki AC i BC w punktach odpowiednio M i N . W trójkąt MNC wpisano okrąg o promieniu długości x (zobacz rysunek).

**Zadanie 5.1 (0–2)**

Uzasadnij, że $r = \frac{ab}{a+b+c}$.

**Zadanie 5.2 (0–2)**

Wykaż, że $x = \frac{a \cdot (c-a)}{a+b+c}$.



Zadanie 6. (0–3)

Pan Karol ma obecnie 50 lat. W wieku 60 lat zamierza wykupić polisę na życie, której koszt obecnie ubezpieczyciel szacuje na 8188 zł (taka jest prognozowana cena polisy za 10 lat). Pan Karol postanowił pewną kwotę k pieniędzy ulokować na lokacie w banku świadczącym korzystne oprocentowanie rosnące. W ostatnim dziesiątym roku oszczędzania oprocentowanie lokaty wynosi 50% w stosunku rocznym, a każdym roku wcześniejszym jest o połowę mniejsze niż w roku następnym, czyli w roku dziewiątym wynosi 25%, a w roku ósmym 12,5%, itd. Odsetki naliczane przez bank nie są dopisywane do wkładu własnego, więc nie podlegają oprocentowaniu.

Jaką kwotę k powinien wpłacić do banku pan Karol, aby po 10 latach oszczędzania dysponować kwotą równą prognozowanej cenie polisy 8188 zł?

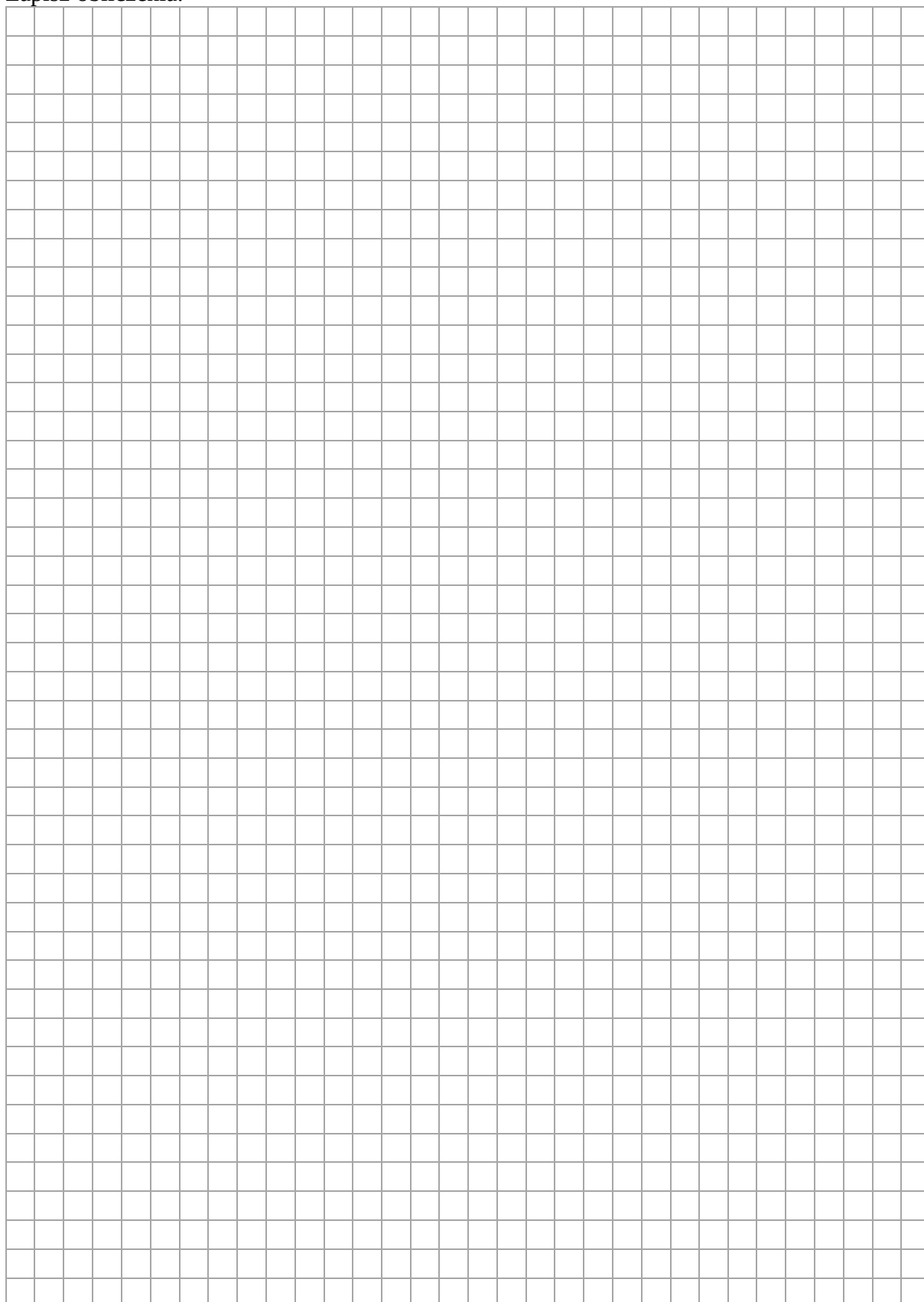
Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Zadanie 7 (0–4)

Rozwiąż równanie $4\cos^2 x - 2\sin^2 2x = 0$ w przedziale $[0, \pi]$.

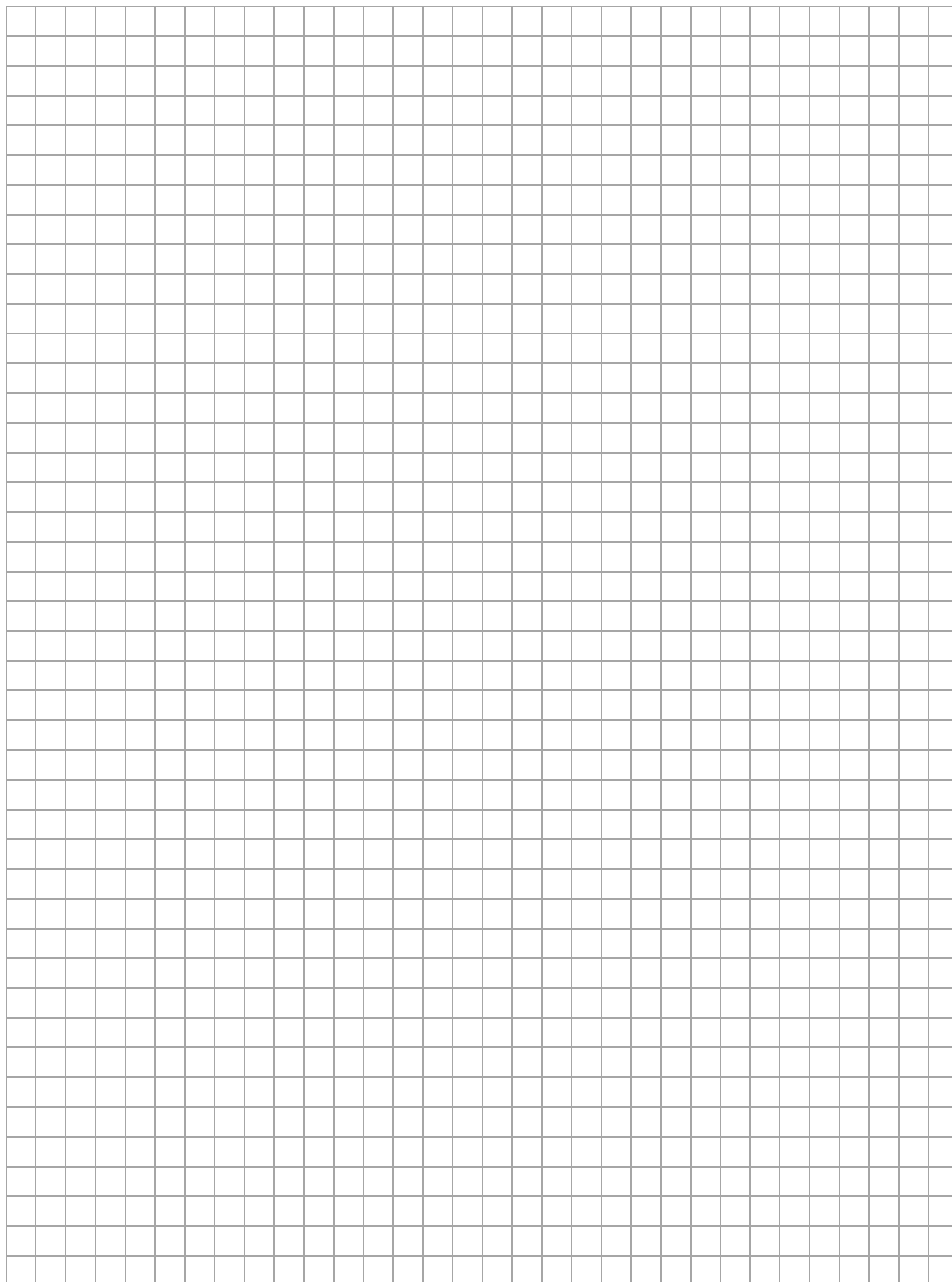
Zapisz obliczenia.

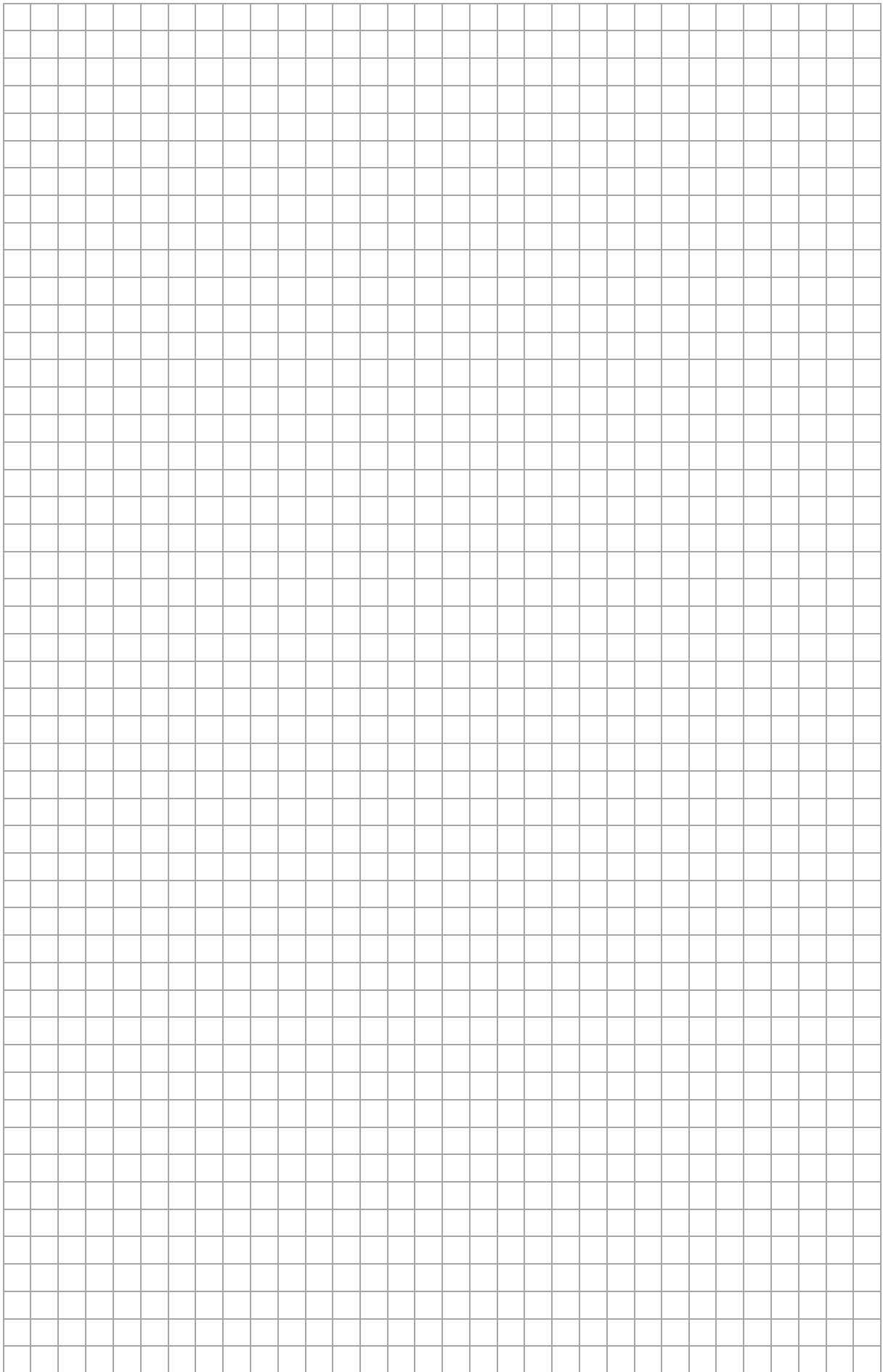


Zadanie 8 (0–6)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (7, -1)$ oraz B należą do okręgu O . Prosta o równaniu $3x - 4y = 0$ jest symetralną cięciwy AB tego okręgu, a odległość środka okręgu O od cięciwy AB jest równa 5. Wyznacz równanie okręgu O .

Zapisz obliczenia.

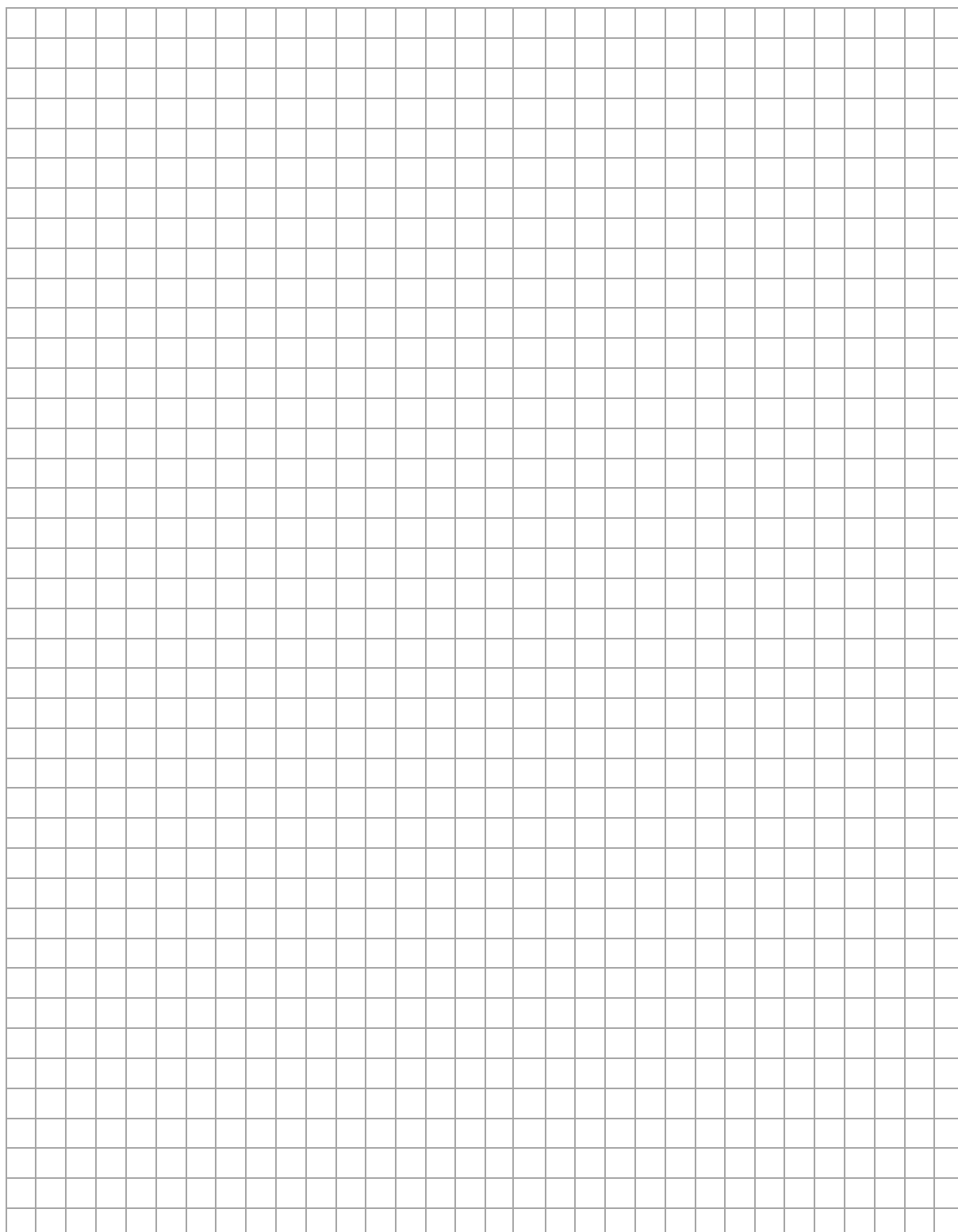




Zadanie 9. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $(m-1)x^2 - mx - 2m + 5 = 0$ ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2 , spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > \frac{m}{(m-1)^2}$.

Zapisz obliczenia.



Zadanie 10. (0–3)

Ciąg (b_n) określony dla każdej dodatniej liczby naturalnej n jest ciągiem geometrycznym malejącym, w którym $b_2 = 24$ oraz spełniony jest warunek $5b_8 = 6b_7 - 4b_9$. Ciąg (a_n) określony dla każdej dodatniej liczby naturalnej n jest ciągiem arytmetycznym, którego suma dziewięciu kolejnych początkowych wyrazów jest równa 225% sumy wszystkich wyrazów ciągu (b_n) . Wiedząc, że $a_1 = b_2$, wyznacz wyraz ogólny ciągu arytmetycznego.

Zapisz obliczenia.

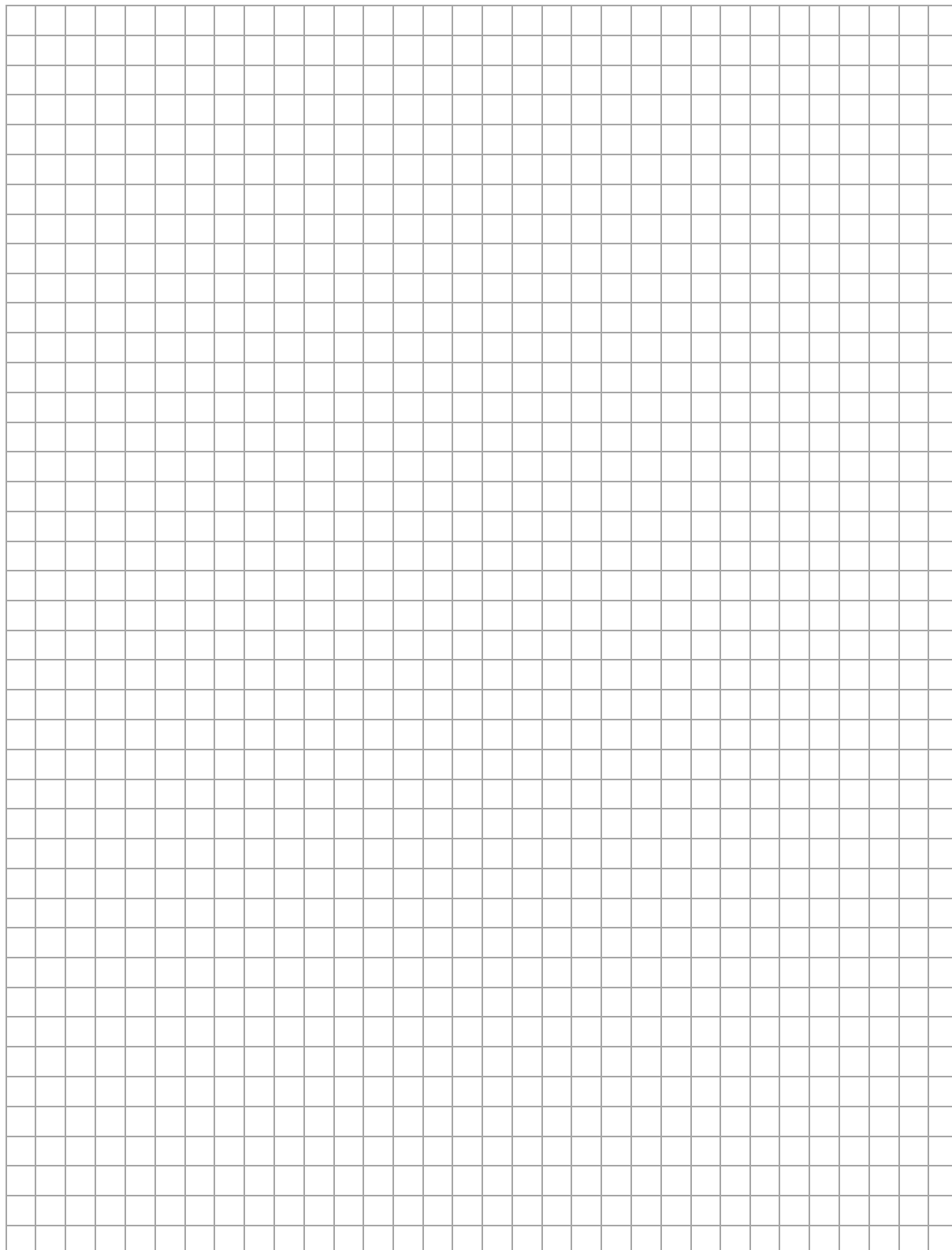
This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Zadanie 11. (0–4)

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 16x + 10y \\ 4x^2 + 4y^2 = 24x + 12y \end{cases}.$$

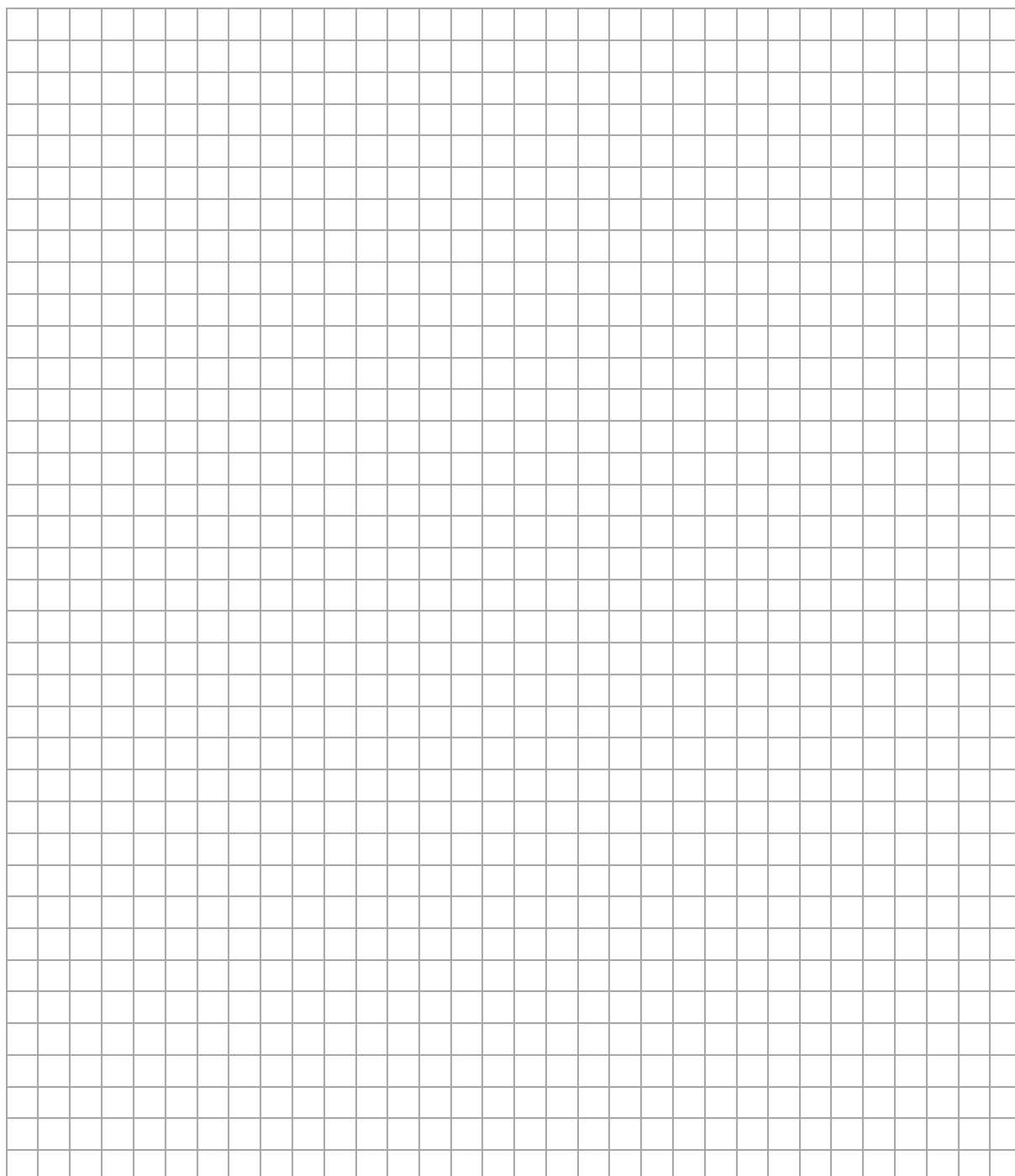
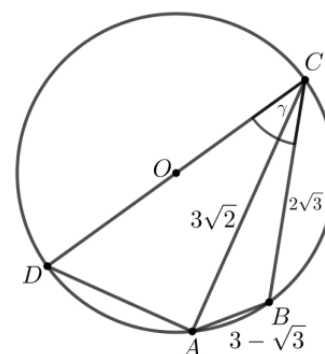
Zapisz obliczenia.



Zadanie 12. (0-4)

W czworokącie $ABCD$ dane są długości boków $|AB| = 3 - \sqrt{3}$ i $|BC| = 2\sqrt{3}$. Przekątna AC czworokąta ma długość $|AC| = 3\sqrt{2}$, a jego bok CD jest średnicą okręgu opisanego na tym czworokącie.

Oblicz pole powierzchni czworokąta $ABCD$.
Zapisz obliczenia.



Zadanie 13. (0–5)

A wooden Christmas tree made of plywood, decorated with star-shaped cutouts. The tree is constructed from multiple layers of plywood, creating a tiered, conical shape. Each layer features a central star-shaped cutout, and the edges of the layers are also cut into a jagged, star-like pattern. The tree is set against a plain white background.

Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form a uniform pattern of small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

