



ARKUSZ MATURALNY KWIECIEŃ 2026

MATEMATYKA ROZSZERZONA

Zadanie 1. (0-2p)

Oblicz granicę funkcji: $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{8-2x}{x^3-12x^2+48x-64}$.

Rozwiązanie:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{8-2x}{x^3-12x^2+48x-64} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2(4-x)}{(x-4)^3} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-2(x-4)}{(x-4)^3} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-2}{(x-4)^2} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty$$

Proponowane zasady oceniania

Akceptowane są wszystkie rozwiązania niestandardowe poprawne i spełniające warunki zadania.

2 pkt – poprawne obliczenie granicy $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$

1 pkt – przekształcenie wyrażenia do postaci $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-2(x-4)}{(x-4)^5}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Zadanie 2. (0-3p)

Wykaż, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność: $4x^2 + 9y^2 \geq 2xy(\sqrt{15} + 2)$.

Rozwiązanie:

Założenia: $x, y \in \mathbb{R}$

Teza: $4x^2 + 9y^2 \geq 2xy(\sqrt{15} + 2)$

Dowód:

Przekształćmy równoważnie tezę: $4x^2 + 9y^2 - 2xy\sqrt{15} - 4xy \geq 0$

Grupując wyrazy otrzymamy:

$$3x^2 - 2\sqrt{15}xy + 5y^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 \geq 0$$

$$(\sqrt{3}x - \sqrt{5}y)^2 + (x - 2y)^2 \geq 0$$

Jest to nierówność tożsamościowa dla $x, y \in \mathbb{R}$ ■



Proponowane zasady oceniania

Akceptowane są wszystkie rozwiązania niestandardowe poprawne i spełniające warunki zadania.

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – zapisanie nierówności w postaci $(\sqrt{3}x - \sqrt{5}y)^2 + (x - 2y)^2 \geq 0$

1 pkt – sprawdzenie wyrażenia $3x^2 - 2\sqrt{15}xy + 5y^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 \geq 0$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Zadanie 3. (0-3p)

Rozwiąż równanie: $\binom{n+2}{4} = 5 \binom{n}{3}$, dla $n \in \mathbf{N}$ i $n \geq 3$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\frac{(n+2)!}{4!(n+2-4)!} &= 5 \cdot \frac{n!}{3!(n-3)!} \\ \frac{(n-2)! \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{24 \cdot (n-2)!} &= 5 \cdot \frac{(n-3)! \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{6 \cdot (n-3)!} \\ \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{4} - 5n(n-1)(n-2) &= 0 \\ n(n-1)((n+1)(n+2) - 20(n-2)) &= 0 \\ n = 0 \notin D \vee n = 1 \notin D \vee n^2 + 3n + 2 - 20n + 40 &= 0 \\ n^2 - 17n + 42 = 0 \Leftrightarrow (n-14)(n-3) = 0 \Leftrightarrow (n = 14 \vee n = 3) &\end{aligned}$$

Odp. $n \in \{3, 14\}$.

Proponowane zasady oceniania

Akceptowane są wszystkie rozwiązania niestandardowe poprawne i spełniające warunki zadania.

3 pkt – poprawne rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi $n \in \{3, 14\}$

2 pkt – doprowadzenie równania do postaci $n(n-1)(n+1)(n+2) - 20(n-2) = 0$

1 pkt – zastosowanie symboli Newtona $\frac{(n+2)!}{4!(n+2-4)!} = 5 \cdot \frac{n!}{3!(n-3)!}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Zadanie 4. (0–4p)

Rozwiąż równanie: $\sin^3 x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{8}$, gdzie $x \in [0, \pi]$.

Rozwiązanie:

Pomnóżmy obie strony równania przez 2:

$$2\sin^3 x \cos x - 2\sin x \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$2\sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Wykorzystując wzory na sinus i cosinus podwojonego kąta otrzymamy:

$$-\sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{4} \mid \cdot (-2)$$

$$2\sin 2x \cdot \cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$4x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 4x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$$

Sprawdzamy dla $x \in [0, \pi]$:

$$k = 0: x = -\frac{\pi}{16} \notin D; \quad x = \frac{5\pi}{16} \checkmark$$

$$k = 1: x = -\frac{\pi}{16} + \frac{8\pi}{16} = \frac{7\pi}{16} \checkmark; \quad x = \frac{5\pi}{16} + \frac{8\pi}{16} = \frac{13\pi}{16} \checkmark$$

$$k = 2: x = -\frac{\pi}{16} + \pi = \frac{15\pi}{16} \checkmark; \quad x = \frac{5\pi}{16} + \pi \notin D$$

$$\text{Odp. } x \in \left\{ \frac{5\pi}{16}, \frac{7\pi}{16}, \frac{13\pi}{16}, \frac{15\pi}{16} \right\}.$$

Proponowane zasady oceniania

Akceptowane są wszystkie rozwiązania niestandardowe poprawne i spełniające warunki zadania.

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i podanie wszystkich rozwiązań równania:

$$x \in \left\{ \frac{5}{16}\pi, \frac{7}{16}\pi, \frac{13}{16}\pi, \frac{15}{16}\pi \right\}$$

3 pkt – przekształcenie równania do postaci: $\sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i podanie rozwiązania:

$$x = -\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \text{ lub } x = \frac{5\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

2 pkt – zastosowanie wzorów i doprowadzenie równania do postaci: $2\sin 2x \cdot \cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

1 pkt – przekształcenie równania do postaci $2 \sin x \cdot \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

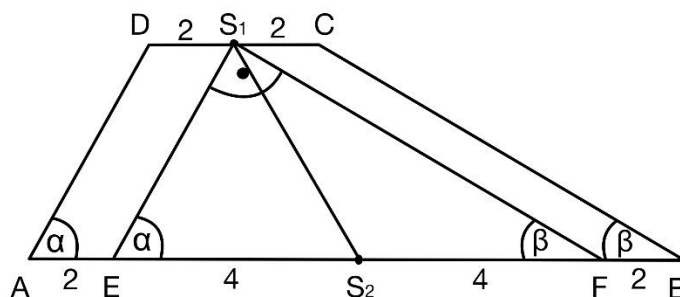
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Zadanie 5. (0-3p)

W trapezie $ABCD$, w którym podstawy mają długości $|AB| = 12$ cm i $|CD| = 4$ cm, suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie jest równa 90° . Oblicz długość odcinka łączącego środki S_1, S_2 podstaw tego trapezu.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Dane: $\alpha + \beta = 90^\circ$, S_1, S_2 — środki podstaw CD i AB .

Poprowadźmy prostą równoległą do AD i przechodzącą przez S_1 oraz prostą równoległą do BC i przechodzącą przez S_2 ; wówczas $\triangle ES_1F$ jest prostokątny, w którym $|EF| = 8$. Punkt S_2 jest środkiem przeciwprostokątnej EF , zatem jest również środkiem okręgu opisanego na $\triangle ES_1F$.

Wobec tego: $|S_1S_2| = 4 \text{ cm}$

Odp. $|S_1S_2| = 4 \text{ cm}$.

Proponowane zasady oceniania

Akceptowane są wszystkie rozwiązania niestandardowe poprawne i spełniające warunki zadania.

3 pkt – zauważenie, że punkt S_2 jest środkiem przeciwprostokątnej w $\triangle ES_1F$, zatem $|S_1S_2| = |ES_2| = |FS_2| = 4$; $|S_1S_2| = R$ – promień okręgu opisanego na $\triangle EFS_1$.

2 pkt – wykorzystanie założenia, że suma miar kątów przy dłuższej podstawie jest równa 90° , zatem $\triangle ES_1F$ jest prostokątny.

1 pkt – zadanie „na dorysowanie”: narysowanie trapezu i zaznaczenie S_1, S_2 – środków podstaw; dorysowanie prostych równoległych do AD i do BC przechodzących przez S_1 .

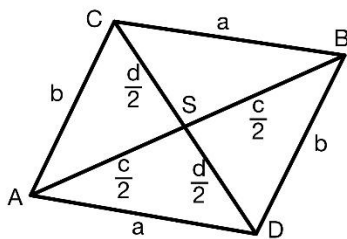
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Zadanie 6. (0-3p)

Wykaż, że jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta, to: $a^2 + b^2 > \frac{1}{2} c^2$.

Rozwiązanie:

Założenia: Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku; S – środek boku AB



Teza: $a^2 + b^2 > \frac{1}{2} c^2$

Dowód:

Przekształćmy trójkąt ABC przez symetrię środkową o środku w punkcie S , będącym środkiem boku AB . Suma przekształconego trójkąta i jego obrazu w tej symetrii jest równoległobokiem $ADBC$. Oznaczmy przez d długość przekątnej CD , $\alpha = |\angle DAC|$, $|\angle ADB| = 180^\circ - \alpha$.



Korzystając z twierdzenia cosinusów w $\triangle ADC$ i $\triangle ADB$: $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$ (1)

oraz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha) \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$ (2)

dodając stronami (1) i (2): $2a^2 + 2b^2 = c^2 + d^2 \wedge d^2 > 0$, zatem $2a^2 + 2b^2 > c^2 \Leftrightarrow$

$a^2 + b^2 > \frac{1}{2} c^2$, cnd.

Proponowane zasady oceniania

Akceptowane są wszystkie rozwiązania niestandardowe poprawne i spełniające warunki zadania.

3 pkt – doprowadzenie do nierówności postaci $a^2 + b^2 > \frac{1}{2} c^2$

2 pkt – zastosowanie twierdzenia cosinusów w $\triangle ADC$ i w $\triangle ADB$, rozwiązanie układu równań i doprowadzenie do postaci $2a^2 + 2b^2 = c^2 + d^2$

1 pkt – przekształcenie $\triangle ABC$ przez symetrię środkową względem punktu S , będącym środkiem boku AB i uzyskanie równoległoboku.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Zadanie 7. (0-3p)

Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych podzielnych przez 4 o niepowtarzających się cyfrach należących do zbioru $\{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

Rozwiązanie:

Aby liczba była podzielna przez 4, to cyfra dziesiątek i jedności musi tworzyć liczbę podzielną przez 4. Zatem liczba ośmiocyfrowa musi się kończyć na 04, 40, 60, 16, 36, 56, 64, 76, 96. Każde ustawienie pierwszych sześciu cyfr stanowi wariację bez powtórzeń sześćelementowego zbioru. Rozważmy 2 przypadki:

1) Wśród cyfr dziesiątek i jedności występuje cyfra 0 $\Rightarrow 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 2160$

2) Wśród cyfr dziesiątek i jedności nie występuje cyfra 0 $\Rightarrow 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 = 3600$

$2160 + 3600 = 5760$

Odp. Jest 5760 takich liczb.

Proponowane zasady oceniania



Akceptowane są wszystkie rozwiązania niestandardowe poprawne i spełniające warunki zadania.

3 pkt – rozważenie dwóch przypadków:

1) wśród cyfr dziesiątek i jedności występuje 0: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 2160$

2) wśród cyfr dziesiątek i jedności nie występuje zero: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 = 3600$

oraz podanie poprawnej odpowiedzi: 5760.

2 pkt – ustalenie liczb sześciocyfrowych utworzonych z cyfr ze zbioru X , które są podzielne przez 4; ustalenie, że sześć pierwszych cyfr stanowi wariację bez powtórzeń sześćoelementowego zbioru.

1 pkt – wykorzystanie właściwości liczb podzielnych przez 4.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Zadanie 8. (0–3p)

W magazynie znajdują się kalkulatory produkowane przez trzy różne firmy. Pierwsza wyprodukowała 45%, druga 30%, a trzecia 25% całkowitej liczby kalkulatorów znajdujących się w tym magazynie. Na 100 kalkulatorów w każdej firmie trafia się inna liczba wadliwych urządzeń: w pierwszej firmie pięć wadliwych, w drugiej cztery, a w trzeciej dwa.

Wylosowano jeden kalkulator, który okazał się być wadliwy. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrany kalkulator został wyprodukowany przez pierwszą firmę. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

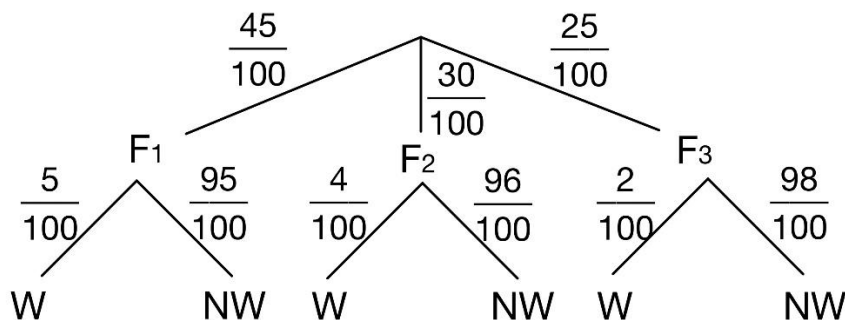
Rozwiązanie:

A – wylosowano kalkulator, który jest wadliwy

F_1 – wylosowany kalkulator pochodzi z firmy F_1 ; F_2 – wylosowany kalkulator pochodzi z firmy F_2

F_3 – wylosowany kalkulator pochodzi z firmy F_3

Do obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia $P(F_1|A)$ możemy wykorzystać drzewo stochastyczne:



$$P(F_1|A) = \frac{P(A|F_1) \cdot P(F_1)}{P(A)} = \frac{\frac{45}{100} \cdot \frac{5}{100}}{\frac{45}{100} \cdot \frac{5}{100} + \frac{30}{100} \cdot \frac{4}{100} + \frac{25}{100} \cdot \frac{2}{100}} = \frac{45}{79}$$

Odp. $P(F_1|A) = \frac{45}{79}$.

Proponowane zasady oceniania

Akceptowane są wszystkie rozwiązania niestandardowe poprawne i spełniające warunki zadania.

3 pkt – poprawne obliczenie $P(F_1 | A) = \frac{45}{79}$

2 pkt – wykorzystanie wzoru Bayesa i zapisanie odpowiedniej równości prowadzącej do wyznaczenia szukanego prawdopodobieństwa albo wyznaczenie jednego z poniższych prawdopodobieństw.

1 pkt – obliczenie prawdopodobieństwa całkowitego $P(A)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Zadanie 9. (0-3p)

Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $D(3, 1)$, $\overrightarrow{CD} = [-4, -3]$ i $\overrightarrow{DA} = [-6, -2]$. Oblicz pole tego równoległoboku.

Rozwiązanie:

Niech $A = (x_A, y_A)$, $C = (x_C, y_C)$

$$\overrightarrow{CD} = [-4, -3] \Leftrightarrow [3 - x_C, 1 - y_C] = [-4, -3] \Leftrightarrow C = (7, 4)$$

$$\overrightarrow{DA} = [-6, -2] \Leftrightarrow [x_A - 3, y_A - 1] = [-6, -2] \Leftrightarrow A = (-3, -1)$$

$$P_{ABCD} = 2 \cdot P_{ADC} \Leftrightarrow P_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |(3 + 3)(4 + 1) - (1 + 1)(7 + 3)| = 10$$



Odp. $P_{ABCD} = 10$.

Proponowane zasady oceniania

Akceptowane są wszystkie rozwiązania niestandardowe poprawne i spełniające warunki zadania.

3 pkt – obliczenie pola równoległoboku: $P_{ABCD} = 10$

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktu $A = (-3, 1)$

1 pkt – obliczenie współrzędnych punktu $C = (7, 4)$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Zadanie 10. (0-5p)

Dane są ciągi arytmetyczne (a_n) i (b_n) , określone dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$. Ciąg (a_n) jest rosnący, suma trzeciego i piątego wyrazu jest równa 30, a iloczyn drugiego i szóstego wyrazu jest równy 29. Suma 50 początkowych wyrazów ciągu (b_n) o numerach nieparzystych jest równa 2000, a suma 50 początkowych wyrazów ciągu (b_n) o numerach parzystych jest równa 2050. Wyznacz ciągi (a_n) i (b_n) oraz oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{b_{n-1}}$.

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} a_3 + a_5 = 30 \\ a_2 \cdot a_6 = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 6r = 30 \\ (a_1 + r)(a_1 + 5r) = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 15 - 3r \\ (15 - 2r)(15 + 2r) = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -6 \\ r = 7 \end{cases} \Leftrightarrow a_n = 7n - 13$$

$$\begin{cases} \frac{b_1 + b_{99}}{2} \cdot 50 = 2000 \\ \frac{b_2 + b_{100}}{2} \cdot 50 = 2050 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b_1 + 98r_1 = 80 \\ 2b_1 + 100r_1 = 82 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ b_1 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow b_n = n - 10$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{b_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7(n+2) - 13}{(n-1) - 10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n+1}{n-11} = 7$$

Odp. $a_n = 7n - 13$, $b_n = n - 10$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{b_{n-1}} = 7$.

Proponowane zasady oceniania

Akceptowane są wszystkie rozwiązania niestandardowe poprawne i spełniające warunki zadania.

5 pkt – obliczenie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{b_{n-1}} = 7$

4 pkt - wyznaczenie $a_n = 7n - 13$, $b_n = n - 10$

3 pkt - rozwiązanie układu równań:
$$\begin{cases} \frac{b_1+b_{99}}{2} \cdot 50 = 2000 \\ \frac{b_2+b_{100}}{2} \cdot 50 = 2050 \end{cases}$$
 i wyznaczenie $r_1 = 1$, $b_1 = -9$

2 pkt - rozwiązanie układu równań:
$$\begin{cases} 2a_1 + 6r = 30 \\ (a_1 + r)(a_1 + 5r) = 29 \end{cases}$$
 i wyznaczenie $a_1 = -6$, $r = 7$

1 pkt - zapisanie zależności między wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) :
$$\begin{cases} a_3 + a_5 = 30 \\ a_2 \cdot a_6 = 29 \end{cases}$$

0 pkt - rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Zadanie 11. (0-4p)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , $m \in \mathbb{R}$, dla których równanie $x^2 + (m - 3)x + 6 - 2m = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste większe od -4 .

Rozwiązanie:

I. sposób (z wykorzystaniem wzorów Viete'a):

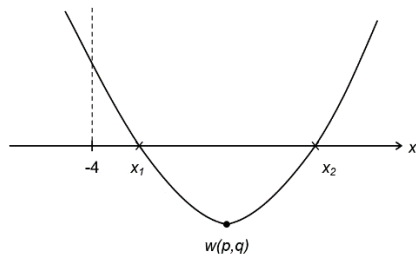
$$1) \Delta > 0 \Leftrightarrow (m - 3)^2 - 4(6 - 2m) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 15 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -5) \cup (3, \infty)$$

$$2) \begin{cases} x_1 > -4 \\ x_2 > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4 > 0 \\ x_2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4 + x_2 + 4 > 0 \\ (x_1 + 4)(x_2 + 4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 8 > 0 \\ x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -m + 3 + 8 > 0 \\ 6 - 2m + 4(-m + 3) + 16 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty, 11) \\ m \in (-\infty, \frac{17}{3}) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty, \frac{17}{3}), \text{ zatem}$$

$$\begin{cases} 1) m \in (-\infty, -5) \cup (3, \infty) \\ 2) m \in (-\infty, \frac{17}{3}) \end{cases}$$

II. sposób (z wykorzystaniem własności funkcji kwadratowej):



$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ p > -4 \\ f(-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 15 > 0 \\ \frac{-m + 3}{2} > -4 \\ 16 - 4m + 12 + 6 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty, -5) \cup (3, \infty) \\ m \in (-\infty, 11) \\ m \in \left(-\infty, \frac{17}{3}\right) \end{cases}$$

Odp. $m \in (-\infty, -5) \cup \left(3, \frac{17}{3}\right)$.

Proponowane zasady oceniania

Akceptowane są wszystkie rozwiązania niestandardowe poprawne i spełniające warunki zadania.

4 pkt – wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , które spełniają równocześnie dwa warunki, i podanie poprawnej odpowiedzi: $m \in (-\infty, -5) \cup \left(3, \frac{17}{3}\right)$

3 pkt – rozwiązanie układu nierówności z zastosowaniem wzorów Viète'a:

$$m \in (-\infty, -5) \cup (3, \infty) \text{ oraz } m \in \left(-\infty, \frac{17}{3}\right)$$

2 pkt – zapisanie warunków nierówności $\begin{cases} x_1 > -4 \\ x_2 > -4 \end{cases}$ i przekształcenie układu nierówności do postaci pozwalającej na zastosowanie wzorów Viète'a: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 8 > 0 \\ x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 > 0 \end{cases}$

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -5) \cup (3, \infty)$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Zadanie 12. (0-4p)

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ i równoległej do prostej o równaniu $3x + 2y + 12 = 0$.

Rozwiązanie:

$$\text{Prosta } s: y = ax + b; \text{ prosta } k: 3x + 2y + 12 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x - 6$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + 1}} * 6x = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$$

Warunek równoległości: $s \parallel k$, zatem $a = -\frac{3}{2}$



$$f'(x_0) = a, \text{ wówczas: } \frac{3x_0}{\sqrt{3x_0^2+1}} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow -2x_0 = \sqrt{3x_0^2+1}, \text{ przy czym } -2x_0 \geq 0 \Leftrightarrow x_0 \leq 0$$

$$4x_0^2 = 3x_0^2 + 1 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = -1 \text{ lub } x_0 = 1 \notin D$$

$$P(-1, y_0), y_0 = \sqrt{3 * (-1)^2 + 1} = 2; P = (-1, 2)$$

$$y = -\frac{3}{2}x + b \Rightarrow 2 = \frac{3}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

Odp. $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

Proponowane zasady oceniania

Akceptowane są wszystkie rozwiązania niestandardowe poprawne i spełniające warunki zadania.

4 pkt – podanie równania prostej stycznej: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

3 pkt – poprawne rozwiązanie równania $\frac{3x_0}{\sqrt{3x_0^2+1}} = -\frac{3}{2}$ oraz $x_0 = -1, x_0 = 1 \notin D$

2 pkt – podanie warunku równoległości prostych: $a = -\frac{3}{2}$ i $f'(x_0) = -\frac{3}{2}$

1 pkt – obliczenie pochodnej funkcji: $f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{9x^2+1}}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Zadanie 13.

Rozważamy wszystkie trapezy równoramienne o ramieniu długości a oraz krótszej podstawie dwa razy dłuższej od ramienia.

Zadanie 13.1 (0-2p)

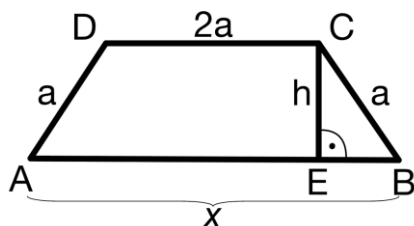
Wykaż, że pole P każdego z rozważanych trapezów wyraża się wzorem:

$$P(x) = \frac{1}{4}(x + 2a)\sqrt{4ax - x^2}$$

gdzie x – dłuższa podstawa, $x \in (0, 4a)$.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z warunku, że $ABCD$ jest trapezem równoramiennym: $|BE| = \frac{x-2a}{2}$

$$\text{W } \triangle BEC: h^2 = a^2 - \left(\frac{x-2a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{4a^2 - x^2 + 4ax - 4a^2}{4} \Leftrightarrow h^2 = \frac{4ax - x^2}{4} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{4ax - x^2}}{2}$$

$$P(x) = \frac{(2a+x) \cdot h}{2} = \frac{(2a+x) \cdot \sqrt{4ax - x^2}}{4} = \frac{1}{4}(x + 2a)\sqrt{4ax - x^2}, x \in (0, 4a), \text{ cnd.}$$

Proponowane zasady oceniania

Akceptowane są wszystkie rozwiązania niestandardowe poprawne i spełniające warunki zadania.

2 pkt – poprawne wskazanie wzoru funkcji: $P(x) = \frac{1}{4} \cdot (x + 2a) \cdot \sqrt{4ax - x^2}$ i podanie dziedziny $x \in (0, 4a)$

1 pkt – poprawne wskazanie wyrażenia wysokości trapezu h od ramienia długości a :

$$h = \frac{\sqrt{4ax - x^2}}{2}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Zadanie 13.2 (0-4p)

Pole każdego z rozważanych trapezów wyraża się wzorem:

$$P(x) = \frac{1}{4}(x + 2a)\sqrt{4ax - x^2}$$

gdzie x – dłuższa podstawa, $x \in (0, 4a)$. Wyznacz obwód tego z rozważanych trapezów, który ma największe pole.

Rozwiązanie:

$$P(x) = \frac{1}{4}(x + 2a)\sqrt{4ax - x^2}, x \in (0, 4a)$$

$$P'(x) = \frac{1}{4} \left(1 \cdot \sqrt{4ax - x^2} + (2a + x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{4ax - x^2}} \cdot (4a - 2x) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\sqrt{4ax - x^2} + \frac{(2a + x)(2a - x)}{\sqrt{4ax - x^2}} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{4ax - x^2 + 4a^2 - x^2}{\sqrt{4ax - x^2}} \right) = \frac{-x^2 + 2ax + 2a^2}{2\sqrt{4ax - x^2}}$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 2ax + 2a^2}{2\sqrt{4ax - x^2}} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2ax + 2a^2 = 0$$

$$\Delta = 4a^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2a^2 = 12a^2 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}a$$

$$x_1 = \frac{-2a - 2\sqrt{3}a}{-2} = a(1 + \sqrt{3}); x_2 = \frac{-2a + 2\sqrt{3}a}{-2} = a(1 - \sqrt{3}) < 0$$

Przedstawmy analizę znaku pochodnej przy pomocy tabeli:

x	$(0, a(1 + \sqrt{3}))$	$(1 + \sqrt{3})a$	$((1 + \sqrt{3})a, 4a)$
$P'(x)$	+	0	-
$P(x)$	↗	P_{max}	↘

$$P_{max} = P((1 + \sqrt{3})a); x = (1 + \sqrt{3})a$$

$$\text{Odp. } L = a + 2a + a + (1 + \sqrt{3})a = (5 + \sqrt{3})a.$$

Proponowane zasady oceniania

Akceptowane są wszystkie rozwiązania niestandardowe poprawne i spełniające warunki zadania.

4 pkt – obliczenie obwodu trapezu, który ma największe pole: $L(x) = (5 + \sqrt{3})a$

3 pkt – poprawna analiza znaku pochodnej funkcji i wyznaczenie wartości maksymalnej P_{max} dla $x = (1 + \sqrt{3})a$

2 pkt – poprawne wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji:

$$x_1 = a(1 + \sqrt{3}) \text{ i } x_2 = a(1 - \sqrt{3})$$

1 pkt – poprawne wyznaczenie pochodnej funkcji: $P'(x) = \frac{-x^2 + 2ax + 2a^2}{2\sqrt{4ax - x^2}}$

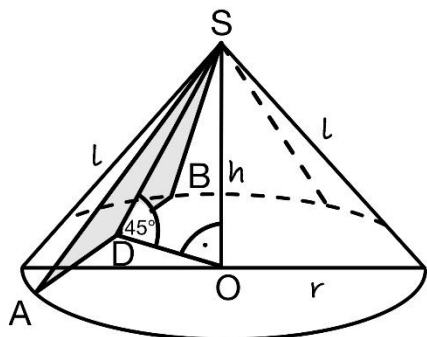
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Zadanie 14. (0-4p)

Przekrój stożka wyznaczony przez cięciwę AB podstawy i wierzchołek S tego stożka jest trójkątem równobocznym o polu $16\sqrt{3}$. Płaszczyzna tego przekroju tworzy z płaszczyzną podstawy stożka kąt o mierze $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Oblicz objętość tego stożka.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$$\triangle ABS \text{ jest równoboczny o boku } l: \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \Leftrightarrow l^2 = 64 \Leftrightarrow l = 8; |DS| = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$\triangle DOS - \text{prostokątny równoramienny, } |OD| = |OS| = h: h^2 + h^2 = (4\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow h = 2\sqrt{6}$$

$$r^2 = l^2 - h^2 \Leftrightarrow r^2 = 64 - 24 \Leftrightarrow r^2 = 40$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 40 \cdot 2\sqrt{6} = \frac{80\sqrt{6}}{3}\pi$$

Odp. $V = \frac{80\sqrt{6}}{3}\pi$

Proponowane zasady oceniania

Akceptowane są wszystkie rozwiązania niestandardowe poprawne i spełniające warunki zadania.

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i wyznaczenie objętości stożka: $V = \frac{80\sqrt{6}}{3}\pi$

3 pkt – wyznaczenie wysokości stożka: $h = 2\sqrt{6}$

2 pkt – wyznaczenie kwadratu promienia podstawy stożka: $r^2 = 40$

1 pkt – wyznaczenie długości tworzącej stożka: $l = 8$ i wysokości trójkąta ABS : $|DS| = 4\sqrt{3}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.